Cadeau bonux 2 : le retour

Laurent Lyaudet

11 mai 2008

Résumé

Cette note est une réponse à la question que je me suis posée hier.

La question qui sert de point de départ à cette note est la suivante : « Quelles sont les familles de parties qui sont la pré-image en 0 d'une fonction modulaire ? ».

Les notations étant les mêmes que dans le premier cadeau bonux, je ne les rappelle pas. Rappelons que dans celui-ci, nous avons montré que les familles de partie qui sont les pré-images en 0 de fonctions sous-modulaires sont les parties stables par union et intersection.

Les familles de parties que nous cherchons à caractériser sont un sous-ensemble de ces familles stables par union et intersection. Remarquons que toute famille de ce type est un sous-treillis de $(\mathcal{P}(E), \subset)$ puisque l'intersection et l'union de deux ensembles sont leurs infimum et supremum dans l'ordre d'inclusion, la réciproque étant trivialement fausse.

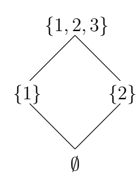

Fig. 1 – sous-treillis non clos par union

Une telle famille P possède donc un élément maximum ($X_{max} = \bigcup P$) et un élément minimum ($X_{min} = \bigcap P$) pour l'inclusion.

Nous allons montrer que ces deux éléments suffisent à caractériser la famille si elle se définit comme la pré-image en 0 d'une fonction modulaire.

Lemme 1 *Soient $P \subseteq \mathcal{P}(E)$ et f une fonction modulaire à valeurs réelles positives. Si $P = f^{-1}(0)$, alors P est le sous-treillis complet $P = \{X \in \mathcal{P}(E) / X_{min} \subseteq X \subseteq X_{max}\}$.*

Preuve :

Soit X un sous-ensemble de E tel que $X_{min} \subseteq X \subseteq X_{max}$. Par modularité de f, on a $f(X) + f((X_{max} \backslash X) \cup X_{min}) = f(X \cup ((X_{max} \backslash X) \cup X_{min})) + f(X \cap ((X_{max} \backslash X) \cup X_{min})) = f(X_{max}) + f(X_{min}) = 0$. Donc $f(X) = 0$ et $X \in P$.

■

Il ne reste donc qu'à montrer que tout sous-treillis complet est la pré-image en 0 d'une fonction modulaire.

Lemme 2 *Si P est un sous-treillis complet, alors il existe une fonction modulaire à valeurs entières telle que $P = f^{-1}(0)$.*

Preuve :

Soient $X_{max} = \bigcup P$ et $X_{min} = \bigcap P$. Clairement, la fonction modulaire $f = f_3 + f_4$ (cf. cadeau bonux) avec X_{max} et X_{min} convient. En effet, $|Y \backslash X_{max}|$ s'annule si et seulement si Y est inclus dans X_{max} et $|X_{min} \backslash Y|$ s'annule si et seulement si Y contient X_{min}.

■

Quand P se réduit à une partie $X_{max} = X_{min}$, on retrouve sans surprise la différence symétrique dont nous étions partis dans le premier opus de cadeau bonux.

Corollaire 1 *Soient E un ensemble fini et $P \subseteq \mathcal{P}(E)$. P est un sous-treillis complet si et seulement s'il existe une fonction modulaire f à valeur réelles positives ou nulles sur $\mathcal{P}(E)$ telle que $P = f^{-1}(0)$.*

Notons tout de même que bien évidemment il existe des familles stables par intersection et union qui ne sont pas des sous-treillis complets.

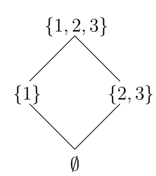

FIG. 2 – treillis clos par union et intersection non complet

Pour conclure, il reste donc le problème ouvert (à ma connaissance) suivant : « Quelles sont les familles de partie qui sont la pré-image des k premières valeurs d'une fonction (sous)-modulaire à valeurs entières ? ». Toute personne ayant la réponse est cordialement invitée à rédiger « Cadeau bonux 3 : la vengeance ».