

Principe de première différence appliqué à la largeur de jumeaux et la largeur de fusion des structures binaires

Laurent Lyaudet*

22 juin 2025

Résumé

Dans cet article, nous étudions la largeur de jumeaux et la largeur de fusion à la lumière du principe de première différence.

Version initiale : 2025/06/21 Version courante : 2025/06/22

Mots-clés : principe de première différence, structures binaires, 2-structures, graphes, largeur de jumeaux, largeur de fusion, largeur de jumeaux questionnable, largeur de fusion questionnable

1 Introduction

Dans cet article, nous continuons notre travail de contextualisation de diverses largeurs de graphes ou de structures binaires dans le cadre du principe de première différence. Ce travail a commencé dans Lyaudet (2020). Avant cela, à la suite de Cantor (1895), Hausdorff (1907) et Sierpiński (1932), nous avons commencé à étudier le principe de première différence dans Lyaudet (2018), Lyaudet (2019). Nous montrons que la largeur de jumeaux (*twin-width* introduite dans Bonnet et al. (2020)) et la largeur de fusion (*merge-width* introduite dans Dreier and Toruńczyk (2025)) prennent place très naturellement dans le cadre du principe de première différence.

2 Définitions communes

Aussi bien pour la largeur de jumeaux que pour la largeur de fusion, nous avons besoin du principe de première différence étendu avec le type d'adjacence constant spécial nyf (*not yet fixed*). (Il y a aussi un type d'adjacence constant spécial alf (*already fixed*). Nous les avons publiés pour la première fois dans Lyaudet (2020), mais l'idée de ces deux types d'adjacence spéciaux date de fin 2019 et alf est implicite dans la définition de la largeur arborescente questionnable dans Lyaudet (2019).)

*<https://lyaudet.eu/laurent/>, laurent.lyaudet@gmail.com

Considérons une signature binaire $\mathcal{S}$ de relations et fonctions unaires et binaires. Étant donné un ensemble S , une $(\mathcal{S}, S, k, l)$ -suite-d'applications est une suite (indexée par un ordinal) $(S_i)_{i \in l}$ de longueur l de $\mathcal{S}$ -structures de cardinalité au plus k , k étant le plus petit tel cardinal, avec une suite d'applications f_i de S vers les domaines des S_i structures. Chaque S_i est un $\mathcal{S}$ -structure-item (de la suite-d'applications/de la suite $(S_i)_{i \in l}$). Ainsi chaque élément/sommet x de S est associé à une suite $(x_i = f_i(x))_{i \in l}$; cette suite est un "élément" de la suite-d'applications/de la suite $(S_i)_{i \in l}$; elle correspond à un élément/sommet de S ; chaque $x_i = f_i(x)$ est un élément/sommet-item.

Définition 2.1 (Question nyf-étendue). *Étant donné deux éléments X, Y d'une suite-d'applications, on dit que (q, x_q, y_q, S_q) est la question de X, Y , si q est le plus petit ordinal tel que $x_q \neq y_q$ et le type d'adjacence entre x_q et y_q n'est pas nyf.*

3 Largeur de jumeaux

Définition 3.1 (Largeur de jumeaux). *Une décomposition par jumeaux d'une $\mathcal{S}$ -structure S est une suite de $\mathcal{S}$ -structures indexée par un ordinal $(S_i)_{i \in l+1}$ telle que $S_0 = S$ et S_l est un singleton. On passe toujours de S_i à S_{i+1} par une unique fusion/contraction de deux sommets de S_i en un. Soient deux sommets $x, y \in S_i$, on dit que l'arête entre ces sommets est rouge si les adjacences dans la structure binaire de départ sont d'au moins deux types distincts entre les sommets correspondant à $f_i^{-1}(x)$ d'une part et $f_i^{-1}(y)$ d'autre part. Le degré rouge maximum d'une $\mathcal{S}$ -structure S_i est égal au supremum des degrés de ses sommets quand on ne garde que les arêtes rouges. La largeur d'une décomposition par jumeaux $(S_i)_{i \in l+1}$ est égale au supremum des degrés rouges maximums des S_i . La largeur de jumeaux d'une $\mathcal{S}$ -structure S , notée $\text{tw}_w(S)$, est le minimum des largeurs de toutes ses décompositions par jumeaux.*

À condition de ne pas se focaliser sur la taille des structure-items, mais de regarder le degré des adjacences nyf, l'équivalence avec le principe de première différence nyf-étendu est assez claire. Il suffit de renverser la décomposition pour considérer des séparations/décontractions.

Définition 3.2 (Largeur de jumeaux questionnable). *Une décomposition par jumeaux questionnable d'une $\mathcal{S}$ -structure S est une $(\mathcal{S}, S, k, l + 1)$ -suite-d'applications (une suite de $\mathcal{S}$ -structures indexée par un ordinal $(S_i)_{i \in l+1}$) telle que S_0 est un singleton et $S_l = S$. On passe toujours de S_i à S_{i+1} par une unique séparation/décontraction d'un sommet de S_i en deux. Le degré nyf maximum d'une $\mathcal{S}$ -structure S_i est égal au supremum des degrés de ses sommets quand on ne garde que les arêtes nyf. La largeur d'une décomposition par jumeaux questionnable $(S_i)_{i \in l+1}$ est égale au supremum des degrés nyf maximum des S_i . La largeur de jumeaux questionnable d'une $\mathcal{S}$ -structure S , notée $\text{tw}_{qw}(S)$, est le minimum des largeurs de toutes ses décompositions par jumeaux questionnables.*

Théorème 3.3. *La largeur de jumeaux est égale à la largeur de jumeaux questionnable.*

4 Largeur de fusion

Définition 4.1 (Largeur de fusion (faible)). Soit S un ensemble de sommets et une S -structure. Une suite de constructions est une suite d'étapes, qui maintiennent une partition $\mathcal{P}$ de S et une partition de $\binom{S}{2}$ en 2 ensembles : “arêtes” résolues $\mathcal{R}$ avec un type d'adjacence donné (cela peut correspondre aux arêtes et aux non-arêtes d'un graphe), et les paires non-résolues $\mathcal{U}$. Au départ, $\mathcal{P}$ partitionne S en singletons et toute paire de $\binom{S}{2}$ est non-résolue. À chaque étape, une des deux opérations suivantes est réalisée :

- fusionner deux parties $X, Y \in \mathcal{P}$, en remplaçant les deux parties par leur union,
- résoudre une paire de parties $X, Y \in \mathcal{P}$ par un type d'adjacence fixé (on peut avoir $X = Y$ sauf dans le cas de la largeur de fusion faible), en déclarant que toutes les paires non-résolues $\{a, b\} \in \mathcal{U}$ avec $a \in X$ et $b \in Y$ prennent le type d'adjacence choisi pour cette opération (on les déplace de $\mathcal{U}$ à $\mathcal{R}$).

À la fin, on s'assure que $\mathcal{P}$ n'a qu'une seule partie, et que toute paire de $\binom{S}{2}$ est résolue. On obtient ainsi une suite de constructions de S . La largeur de rayon r d'une suite de construction de S est le plus petit nombre k tel qu'à chaque étape, il est vrai que : pour chaque sommet $v \in S$, au plus k parties de la partition courante $\mathcal{P}$ peuvent être atteintes depuis v par un chemin de longueur au plus r dans le graphe des adjacences résolues jusqu'ici. La largeur de fusion de rayon r de S , notée $\text{mw}_r(S)$ ou $\text{wmw}_r(S)$ dans le cas faible, est la plus petite largeur de rayon r parmi les suites de construction de S . Pour finir, une classe de graphes $\mathcal{C}$ a une largeur de fusion bornée, une largeur de fusion faible bornée, si $\text{mw}_r(\mathcal{C}) < \infty$, resp. $\text{wmw}_r(\mathcal{C}) < \infty$, pour tout $r \in \mathbb{N}$, où $\text{mw}_r(\mathcal{C}) = \sup_{S \in \mathcal{C}} \text{mw}_r(S)$, resp. $\text{wmw}_r(\mathcal{C}) = \sup_{S \in \mathcal{C}} \text{wmw}_r(S)$.

C'est une question de nommage :

- $\mathcal{R}$ pour “resolved” (“résolue”) correspond à $\mathcal{A}$ pour alf.
- $\mathcal{U}$ pour “unresolved” (“non-résolue”) correspond à $\mathcal{N}$ pour nyf. Non-résolue est juste un autre mot pour nyf.

Là encore, à condition de ne pas se focaliser sur la taille des structure-items, mais de regarder la condition sur la taille des boules non-nyf, l'équivalence avec le principe de première différence nyf-étendu pour la largeur de fusion faible est très claire. Pour la largeur de fusion, il faut une extension qui sort un peu du cadre du principe de première différence :

Définition 4.2 (Question nyf-pure). Étant donné deux éléments X, Y d'une suite-d'applications, on dit que (q, x_q, y_q, S_q) est la question de X, Y , si q est le plus petit ordinal tel que le type d'adjacence entre x_q et y_q n'est pas nyf. Si $x_q = y_q$, cela revient à regarder le type d'adjacence sur une boucle ; cela ne peut marcher que pour les types d'adjacence symétriques ; en particulier, la largeur de fusion des graphes orientés est déclassée au niveau de la largeur de fusion faible.

Toutes les autres définitions de question peuvent être simulées par celle-ci avec la convention que les boucles n'ont que le type d'adjacence nyf. Ce qui nous fait perdre la possibilité de considérer que les boucles sur les S_i ne servent qu'à fixer les boucles de S . Dans le cas de la largeur de fusion, ce n'est pas gênant car on commence avec tous

les sommets séparés ; ils peuvent donc recevoir leurs boucles par questionnabilité avec S_0 , et ensuite les boucles des S_i ne servent qu'à fixer des adjacences entre sommets.

Définition 4.3 (Largeur de fusion questionnable (faible)). *Soit S un ensemble de sommets et une S -structure. Une décomposition de fusion questionnable est une (S, S, p, l) -suite-d'applications, une suite de S -structures indexée par un ordinal $(S_i)_{i \in I+1}$ telle que $S_0 = S$ et S_l est un singleton. On passe toujours de S_i à S_{i+1} par une unique fusion/contraction de deux sommets de S_i en un.*

La largeur de rayon r d'une décomposition de fusion questionnable de S est le plus petit nombre k tel qu'à chaque étape i , il est vrai que : pour chaque sommet $v \in S$, au plus k sommets de S_i peuvent être atteints depuis v par un chemin de longueur au plus r dans le graphe des adjacences fixées jusqu'ici : par le principe de première différence nyf-étendu dans le cas faible, par la questionnabilité nyf-pure sinon. La largeur de fusion questionnable de rayon r de S , notée $\text{mqw}_r(S)$ ou $\text{wmqw}_r(S)$ dans le cas faible, est la plus petite largeur de rayon r parmi les décompositions de fusion questionnables de S . Pour finir, une classe de graphes $\mathcal{C}$ a une largeur de fusion questionnable bornée, resp. largeur de fusion questionnable faible bornée, si $\text{mqw}_r(\mathcal{C}) < \infty$, resp. $\text{wmqw}_r(\mathcal{C}) < \infty$, pour tout $r \in \mathbb{N}$, où $\text{mqw}_r(\mathcal{C}) = \sup_{S \in \mathcal{C}} \text{mqw}_r(S)$, resp. $\text{wmqw}_r(\mathcal{C}) = \sup_{S \in \mathcal{C}} \text{wmqw}_r(S)$.

Théorème 4.4. *La largeur de fusion questionnable de rayon r est égale à la largeur de fusion de rayon r . Donc la largeur de fusion est bornée si et seulement si la largeur de fusion questionnable l'est.*

Théorème 4.5. *La largeur de fusion questionnable faible de rayon r est égale à la largeur de fusion faible de rayon r . Donc la largeur de fusion faible est bornée si et seulement si la largeur de fusion questionnable faible l'est.*

Nous sommes presque certains que les graphes de degré borné ne sont pas de largeur de fusion faible bornée, alors qu'ils sont de largeur de fusion bornée. Mais nous n'avons pas encore de preuve formelle de cette conjecture.

Les graphes de degré borné ont aussi une largeur arborescente questionnable équilibrée bijective bornée (voir Lyaudet (2022)) ; mais ce n'est pas le cas de la twin-width. Il serait intéressant de savoir comment se comparent la largeur de jumeaux et la largeur de fusion (faible) avec les différentes variantes de largeur arborescente questionnable (voir Lyaudet (2025b)).

Ces traductions de largeurs dans le cadre du principe de première différence ou de la questionnabilité nyf-pure pourraient sembler anecdotiques. Mais ces traductions elles-mêmes sont exprimables dans certaines logiques et elles ne manipulent que des suites d'éléments, donc des structures de "chemins" et non de graphes plus compliqués. Il est possible que des résultats généraux sur le principe de première différence ou la questionnabilité nyf-pure permettent de classer la complexité du calcul de ces largeurs, entre celles qui sont dans P ou NC, ou celles qui sont NP-dures avec ou sans algorithmes d'approximation, etc.

Références

- E. Bonnet, E. J. Kim, S. Thomassé, and R. Watrigant. Twin-width I : tractable FO model checking, 2020. URL <https://arxiv.org/abs/2004.14789>.
- G. Cantor. Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre. *Math. Ann.*, 46 : 481–512, 1895.
- J. Dreier and S. Toruńczyk. Merge-width and first-order model checking, 2025. URL <https://arxiv.org/abs/2502.18065>.
- F. Hausdorff. Untersuchungen über Ordnungstypen V. *Ber. über die Verhandlungen der Königl. Sächs. Ges. der Wiss. zu Leipzig. Math.-phys. Klasse*, 59 :105–159, 1907.
- L. Lyaudet. A class of orders with linear? time sorting algorithm. *CoRR*, abs/1809.00954, 2018. URL <http://arxiv.org/abs/1809.00954>.
- L. Lyaudet. On finite width questionable representations of orders. *CoRR*, abs/1903.02028, 2019. URL <http://arxiv.org/abs/1903.02028>.
- L. Lyaudet. First difference principle applied to modular/questionable-width, clique-width, and rank-width of binary structures. *preprint*, abs/202009, 2020. URL https://lyaudet.eu/laurent/Publi/Journaux/LL2020LargeursStructuresBinaires/LL2020LargeursStructuresBinaires_v5.pdf.
- L. Lyaudet. Diviser n’est pas régner? *preprint*, abs/202205, 2022. URL https://lyaudet.eu/laurent/Publi/Journaux/LL2022DiviserNestPasRegner/LL2022DiviserNestPasRegner_v6.pdf.
- L. Lyaudet. On non-bijective tree-questionable-width. *preprint*, abs/202506-4, 2025a. URL https://lyaudet.eu/laurent/Publi/Journaux/LL2025LAQNonBijective/LL2025LAQNonBijective_en_v2.pdf.
- L. Lyaudet. Sur la largeur arborescente questionnable non-bijective. *preprint*, abs/202506-3, 2025b. URL https://lyaudet.eu/laurent/Publi/Journaux/LL2025LAQNonBijective/LL2025LAQNonBijective_fr_v2.pdf.
- W. Sierpiński. Généralisation d’un théorème de Cantor concernant les ensembles ordonnés dénombrables. *Fundamenta Mathematicae*, 18 :280–284, 1932.