

# Principe de premières différences appliqué à la largeur de jumeaux et la largeur de fusion des structures binaires

Laurent Lyaudet\*

24 novembre 2025

## Résumé

Dans cet article, nous étudions la largeur de jumeaux et la largeur de fusion à la lumière du principe de premières différences.

Version initiale : 2025/06/21 Version courante : 2025/11/24

Mots-clés : principe de premières différences, principe de première différence, structures binaires, 2-structures, graphes, largeur de jumeaux, largeur de fusion, largeur de jumeaux questionnable, largeur de fusion questionnable, largeurs non-nyf

## 1 Introduction

Dans cet article, nous continuons notre travail de contextualisation de diverses largeurs de graphes ou de structures binaires dans le cadre du principe de premières différences. Ce travail a commencé dans Lyaudet (2020). Avant cela, à la suite de Cantor (1895), Hausdorff (1907) et Sierpiński (1932), nous avons commencé à étudier le principe de premières différences dans Lyaudet (2018), Lyaudet (2019). Nous montrons que la largeur de jumeaux (*twin-width* introduite dans Bonnet et al. (2020)) et la largeur de fusion (*merge-width* introduite dans Dreier and Toruńczyk (2025)) prennent place très naturellement dans le cadre du principe de premières différences.

## 2 Définitions communes

Aussi bien pour la largeur de jumeaux que pour la largeur de fusion, nous avons besoin du principe de premières différences étendu avec le type d’adjacence constant spécial nyf (*not yet fixed*). (Il y a aussi un type d’adjacence constant spécial alf (*already fixed*). Nous les avons publiés pour la première fois dans Lyaudet (2020), mais l’idée de ces deux types d’adjacence spéciaux date de fin 2019 et alf est implicite dans la définition de la largeur arborescente questionnable dans Lyaudet (2019).)

---

\*<https://lyaudet.eu/laurent/>, [laurent.lyaudet@gmail.com](mailto:laurent.lyaudet@gmail.com)

Considérons une signature binaire  $\mathcal{S}$  de relations et fonctions unaires et binaires. Étant donné un ensemble  $S$ , une  $(\mathcal{S}, S, k, l)$ -suite-d'applications est une suite (indexée par un ordinal)  $(S_i)_{i \in l}$  de longueur  $l$  de  $\mathcal{S}$ -structures de cardinalité au plus  $k$ ,  $k$  étant le plus petit tel cardinal, avec une suite d'applications  $f_i$  de  $S$  vers les domaines des  $S_i$  structures. Chaque  $S_i$  est un  $\mathcal{S}$ -structure-item (de la suite-d'applications/de la suite  $(S_i)_{i \in l}$ ). Ainsi chaque élément/sommet  $x$  de  $S$  est associé à une suite  $(x_i = f_i(x))_{i \in l}$ ; cette suite est un "élément" de la suite-d'applications/de la suite  $(S_i)_{i \in l}$ ; elle correspond à un élément/sommet de  $S$ ; chaque  $x_i = f_i(x)$  est un élément/sommet-item.

**Définition 2.1** (Question nyf-étendue). *Étant donné deux éléments  $X, Y$  d'une suite-d'applications, on dit que  $(q, x_q, y_q, S_q)$  est la question de  $X, Y$ , si  $q$  est le plus petit ordinal tel que  $x_q \neq y_q$  et le type d'adjacence entre  $x_q$  et  $y_q$  n'est pas nyf.*

### 3 Largeur de jumeaux

**Définition 3.1** (Largeur de jumeaux). *Une décomposition par jumeaux d'une  $\mathcal{S}$ -structure  $S$  est une suite de  $\mathcal{S}$ -structures indexée par un ordinal  $(S_i)_{i \in l+1}$  telle que  $S_0 = S$  et  $S_l$  est un singleton. On passe toujours de  $S_i$  à  $S_{i+1}$  par une unique fusion/contraction de deux sommets de  $S_i$  en un. Soient deux sommets  $x, y \in S_i$ , on dit que l'arête entre ces sommets est rouge si les adjacences dans la structure binaire de départ sont d'au moins deux types distincts entre les sommets correspondant à  $f_i^{-1}(x)$  d'une part et  $f_i^{-1}(y)$  d'autre part. Le degré rouge maximum d'une  $\mathcal{S}$ -structure  $S_i$  est égal au supremum des degrés de ses sommets quand on ne garde que les arêtes rouges. La largeur d'une décomposition par jumeaux  $(S_i)_{i \in l+1}$  est égale au supremum des degrés rouges maximums des  $S_i$ . La largeur de jumeaux d'une  $\mathcal{S}$ -structure  $S$ , notée  $\text{tw}_w(S)$ , est le minimum des largeurs de toutes ses décompositions par jumeaux.*

À condition de ne pas se focaliser sur la taille des structure-items, mais de regarder le degré des adjacences nyf, l'équivalence avec le principe de premières différences nyf-étendu est assez claire. Il suffit de renverser la décomposition pour considérer des séparations/décontractions.

**Définition 3.2** (Largeur de jumeaux questionnable). *Une décomposition par jumeaux questionnable d'une  $\mathcal{S}$ -structure  $S$  est une  $(\mathcal{S}, S, k, l + 1)$ -suite-d'applications (une suite de  $\mathcal{S}$ -structures indexée par un ordinal  $(S_i)_{i \in l+1}$ ) telle que  $S_0$  est un singleton et  $S_l = S$ . On passe toujours de  $S_i$  à  $S_{i+1}$  par une unique séparation/décontraction d'un sommet de  $S_i$  en deux. Le degré nyf maximum d'une  $\mathcal{S}$ -structure  $S_i$  est égal au supremum des degrés de ses sommets quand on ne garde que les arêtes nyf. La largeur d'une décomposition par jumeaux questionnable  $(S_i)_{i \in l+1}$  est égale au supremum des degrés nyf maximum des  $S_i$ . La largeur de jumeaux questionnable d'une  $\mathcal{S}$ -structure  $S$ , notée  $\text{tw}_{qw}(S)$ , est le minimum des largeurs de toutes ses décompositions par jumeaux questionnables.*

**Théorème 3.3.** *La largeur de jumeaux est égale à la largeur de jumeaux questionnable.*

## 4 Largeur de fusion

**Définition 4.1** (Largeur de fusion (faible)). Soit  $S$  un ensemble de sommets et une  $S$ -structure. Une suite de constructions est une suite d'étapes, qui maintiennent une partition  $\mathcal{P}$  de  $S$  et une partition de  $\binom{S}{2}$  en 2 ensembles : “arêtes” résolues  $\mathcal{R}$  avec un type d'adjacence donné (cela peut correspondre aux arêtes et aux non-arêtes d'un graphe), et les paires non-résolues  $\mathcal{U}$ . Au départ,  $\mathcal{P}$  partitionne  $S$  en singletons et toute paire de  $\binom{S}{2}$  est non-résolue. À chaque étape, une des deux opérations suivantes est réalisée :

- fusionner deux parties  $X, Y \in \mathcal{P}$ , en remplaçant les deux parties par leur union,
- résoudre une paire de parties  $X, Y \in \mathcal{P}$  par un type d'adjacence fixé (on peut avoir  $X = Y$  sauf dans le cas de la largeur de fusion faible), en déclarant que toutes les paires non-résolues  $\{a, b\} \in \mathcal{U}$  avec  $a \in X$  et  $b \in Y$  prennent le type d'adjacence choisi pour cette opération (on les déplace de  $\mathcal{U}$  à  $\mathcal{R}$ ).

À la fin, on s'assure que  $\mathcal{P}$  n'a qu'une seule partie, et que toute paire de  $\binom{S}{2}$  est résolue. On obtient ainsi une suite de constructions de  $S$ . La largeur de rayon  $r$  d'une suite de construction de  $S$  est le plus petit nombre  $k$  tel qu'à chaque étape, il est vrai que : pour chaque sommet  $v \in S$ , au plus  $k$  parties de la partition courante  $\mathcal{P}$  peuvent être atteintes depuis  $v$  par un chemin de longueur au plus  $r$  dans le graphe des adjacences résolues jusqu'ici. La largeur de fusion de rayon  $r$  de  $S$ , notée  $\text{mw}_r(S)$  ou  $\text{wmw}_r(S)$  dans le cas faible, est la plus petite largeur de rayon  $r$  parmi les suites de construction de  $S$ . Pour finir, une classe de graphes  $\mathcal{C}$  a une largeur de fusion bornée, une largeur de fusion faible bornée, si  $\text{mw}_r(\mathcal{C}) < \infty$ , resp.  $\text{wmw}_r(\mathcal{C}) < \infty$ , pour tout  $r \in \mathbb{N}$ , où  $\text{mw}_r(\mathcal{C}) = \sup_{S \in \mathcal{C}} \text{mw}_r(S)$ , resp.  $\text{wmw}_r(\mathcal{C}) = \sup_{S \in \mathcal{C}} \text{wmw}_r(S)$ .

C'est une question de nommage :

- $\mathcal{R}$  pour “resolved” (“résolue”) correspond à  $\mathcal{A}$  pour alf.
- $\mathcal{U}$  pour “unresolved” (“non-résolue”) correspond à  $\mathcal{N}$  pour nyf. Non-résolue est juste un autre mot pour nyf.

Là encore, à condition de ne pas se focaliser sur la taille des structure-items, mais de regarder la condition sur la taille des boules non-nyf, l'équivalence avec le principe de premières différences nyf-étendu pour la largeur de fusion faible est très claire. Pour la largeur de fusion, il faut une extension qui sort un peu du cadre du principe de premières différences :

**Définition 4.2** (Question nyf-pure). Étant donné deux éléments  $X, Y$  d'une suite-d'applications, on dit que  $(q, x_q, y_q, S_q)$  est la question de  $X, Y$ , si  $q$  est le plus petit ordinal tel que le type d'adjacence entre  $x_q$  et  $y_q$  n'est pas nyf. Si  $x_q = y_q$ , cela revient à regarder le type d'adjacence sur une boucle ; cela ne peut marcher que pour les types d'adjacence symétriques ; en particulier, la largeur de fusion des graphes orientés est partiellement déclassée au niveau de la largeur de fusion faible ; la largeur de fusion des tournois est totalement déclassée au niveau de la largeur de fusion faible.

Toutes les autres définitions de question peuvent être simulées par celle-ci avec la convention que les boucles n'ont que le type d'adjacence nyf. Ce qui nous fait perdre la possibilité de considérer que les boucles sur les  $S_i$  ne servent qu'à fixer les boucles de

$S$ . Dans le cas de la largeur de fusion, ce n'est pas gênant car on commence avec tous les sommets séparés ; ils peuvent donc recevoir leurs boucles par questionnabilité avec  $S_0$ , et ensuite les boucles des  $S_i$  ne servent qu'à fixer des adjacences entre sommets.

**Définition 4.3** (Largeur de fusion questionnable (faible)). *Soit  $S$  un ensemble de sommets et une  $S$ -structure. Une décomposition de fusion questionnable est une  $(S, S, p, l)$ -suite-d'applications, une suite de  $S$ -structures indexée par un ordinal  $(S_i)_{i \in l+1}$  telle que  $S_0 = S$  et  $S_l$  est un singleton. On passe toujours de  $S_i$  à  $S_{i+1}$  par une unique fusion/contraction de deux sommets de  $S_i$  en un.*

*La largeur de rayon  $r$  d'une décomposition de fusion questionnable de  $S$  est le plus petit nombre  $k$  tel qu'à chaque étape  $i$ , il est vrai que : pour chaque sommet  $v \in S$ , au plus  $k$  sommets de  $S_i$  peuvent être atteints depuis  $v$  par un chemin de longueur au plus  $r$  dans le graphe des adjacences fixées jusqu'ici : par le principe de premières différences nyf-étendu dans le cas faible, par la questionnabilité nyf-pure sinon. La largeur de fusion questionnable de rayon  $r$  de  $S$ , notée  $\text{mqw}_r(S)$  ou  $\text{wmqw}_r(S)$  dans le cas faible, est la plus petite largeur de rayon  $r$  parmi les décompositions de fusion questionnables de  $S$ . Pour finir, une classe de graphes  $\mathcal{C}$  a une largeur de fusion questionnable bornée, resp. largeur de fusion questionnable faible bornée, si  $\text{mqw}_r(\mathcal{C}) < \infty$ , resp.  $\text{wmqw}_r(\mathcal{C}) < \infty$ , pour tout  $r \in \mathbb{N}$ , où  $\text{mqw}_r(\mathcal{C}) = \sup_{S \in \mathcal{C}} \text{mqw}_r(S)$ , resp.  $\text{wmqw}_r(\mathcal{C}) = \sup_{S \in \mathcal{C}} \text{wmqw}_r(S)$ .*

**Théorème 4.4.** *La largeur de fusion questionnable de rayon  $r$  est égale à la largeur de fusion de rayon  $r$ . Donc la largeur de fusion est bornée si et seulement si la largeur de fusion questionnable l'est.*

**Théorème 4.5.** *La largeur de fusion questionnable faible de rayon  $r$  est égale à la largeur de fusion faible de rayon  $r$ . Donc la largeur de fusion faible est bornée si et seulement si la largeur de fusion questionnable faible l'est.*

Dans la première version de cet article, nous conjecturons que les graphes de degré borné ne sont pas de largeur de fusion faible bornée, alors qu'ils sont de largeur de fusion bornée. Szymon Toruńczyk a lu cette première version et a eu l'amabilité de nous faire la remarque que largeur de fusion faible bornée devrait être équivalent à largeur de jumeaux bornée. Nous détaillons le squelette de preuve fourni par Szymon Toruńczyk dans la section suivante.

## 5 Combinaisons des deux largeurs

Poursuivons en fixant des conventions de nommage plus explicites et moins ambiguës. Nous avons déjà fixés les termes de question pour la première différence classique, de question nyf-étendue pour une première extension du principe de premières différences, et de question nyf-pure pour une seconde extension du principe de premières différences qui ne repose plus sur l'obligation d'une différence. Nous qualifierons de simple une question selon le principe de premières différences classique. Il nous semble approprié d'utiliser les adjectifs « questionnable », « questionneble », « questionnable », en parallèle de ces 3 types de questions, « questionneble » et « questionnable » étant des néologismes pour intégrer le « e » de « étendue » et le « p » de

« pure ». On peut aussi associer les formes raccourcies « q », « qs », « qe », « qp ». Les termes englobants seront « question » et « *questionable* » écrit avec un seul « n » comme le mot anglais. Pour résumer, nous proposons les conventions suivantes :

|                      |               |    |
|----------------------|---------------|----|
| question             | questionable  | q  |
| question simple      | questionnable | qs |
| question nyf-étendue | questionneble | qe |
| question nyf-pure    | questionpable | qp |

Il est aussi important d'explicitier un trait commun à toute fixation d'adjacence par une question : les sommets antécédents des deux images doivent être avec des adjacences homogènes si l'on exclut les adjacences déjà fixées. Ce principe sera appelé H.S.E.A.A., ou HIEAA en anglais, pour « Homogène Si on Exclut les Adjacences alf », ou « Homogenous If Excluding alf-Adjacencies » en anglais. HIEAA fait penser à un cri de cowboy ; le principe de premières différences permet même de donner des ordres à des chevaux ;) XD.

**Lemme 5.1.** *Lorsque l'on considère des partitions de l'ensemble des sommets de plus en plus grossières (un ensemble de singletons étant la partition la plus fine), aucune décomposition questionable ne peut fonctionner si à un moment deux parties ne sont pas H.S.E.A.A.*

Ce lemme s'applique notamment aux séquences de contraction/construction de la largeur de jumeaux et de la largeur de fusion.

Dans Dreier and Toruńczyk (2025), l'exemple 1.3, qui montre que largeur de jumeaux bornée implique largeur de fusion bornée, montre en réalité que la largeur de fusion faible est bornée. Cette preuve repose sur l'idée de fixer, avant de contracter deux parties  $A$  et  $B$ , toutes les adjacences entre une partie  $C$  et les parties  $A$  et  $B$ , dès lors que  $C$  n'est pas H.S.E.A.A. avec  $A$  et  $B$  pris ensemble. Le fait de fixer aussi l'adjacence entre les parties  $A$  et  $B$  n'est pas gênant.

Donc :

**Lemme 5.2.** *Si la largeur de jumeaux est bornée, la largeur de fusion faible est bornée. Et notamment,  $\text{tw}_w(S) \leq k$  implique  $\text{wm}_w(S) \leq 2 + k + k^2$ .*

Réciproquement, si  $\text{wm}_w(S) \leq k$ , alors par le lemme 5.1  $\text{tw}_w(S) \leq k - 1$ .

**Lemme 5.3.** *Si la largeur de fusion faible est bornée, la largeur de jumeaux est bornée.*

**Théorème 5.4** (Toruńczyk 2025). *La largeur de jumeaux est bornée si et seulement si la largeur de fusion faible est bornée.*

Inspiré par cette équivalence, nous proposons d'autres largeurs qui ressemblent plus ou moins à la largeur de jumeaux.

**Définition 5.5** (Largeurs non-nyf questionables). *Une décomposition non-nyf questionable d'une  $\mathcal{S}$ -structure  $S$  est une  $(\mathcal{S}, S, k, l + 1)$ -suite-d'applications (une suite de  $\mathcal{S}$ -structures indexée par un ordinal  $(S_i)_{i \in l+1}$ ) telle que  $S_0 = S$  et  $S_l$  est un singleton. On passe toujours de  $S_i$  à  $S_{i+1}$  par une unique fusion/contraction de deux sommets de  $S_i$  en un. Le degré non-nyf maximum d'une  $\mathcal{S}$ -structure  $S_i$  est égal au supremum des*

degrés de ses sommets quand on ne garde que les arêtes non-nyf. Le cardinal non-nyf d'une  $\mathcal{S}$ -structure  $S_i$  est égal au cardinal de l'ensemble des arêtes non-nyf.

Si la décomposition utilise le principe de premières différences nyf-étendu pour fixer toutes les adjacences, on parle de décomposition questionnable. Si la décomposition utilise la questionabilité nyf-pure pour fixer toutes les adjacences, on parle de décomposition questionnable.

La largeur d'une décomposition degré maximum non-nyf questionnable, resp. questionnable,  $(S_i)_{i \in I+1}$  est égale au supremum des degrés non-nyf maximum des  $S_i$ . La largeur de décomposition degré maximum non-nyf questionnable, resp. questionnable, d'une  $\mathcal{S}$ -structure  $S$ , notée  $\neg\text{nyf}\Delta_{\text{qew}}(S)$ , resp.  $\neg\text{nyf}\Delta_{\text{qpw}}(S)$ , est le minimum des largeurs de toutes ses décompositions degré maximum non-nyf questionnable, resp. questionnable.

La largeur d'une décomposition cardinal non-nyf questionnable, resp. questionnable,  $(S_i)_{i \in I+1}$  est égale au supremum des cardinaux des ensembles d'arêtes non-nyf des  $S_i$ . La largeur de décomposition cardinal non-nyf questionnable, resp. questionnable, d'une  $\mathcal{S}$ -structure  $S$ , notée  $\neg\text{nyf}\sharp_{\text{qew}}(S)$ , resp.  $\neg\text{nyf}\sharp_{\text{qpw}}(S)$ , est le minimum des largeurs de toutes ses décompositions cardinal non-nyf questionnable, resp. questionnable.

Bien évidemment :

**Lemme 5.6.**  $\neg\text{nyf}\Delta_{\text{qew}}(S) \leq k$  implique  $\neg\text{nyf}\Delta_{\text{qpw}}(S) \leq k$ .  $\neg\text{nyf}\sharp_{\text{qew}}(S) \leq k$  implique  $\neg\text{nyf}\sharp_{\text{qpw}}(S) \leq k$ .

**Lemme 5.7.**  $\neg\text{nyf}\sharp_{\text{qew}}(S) \leq k$  implique  $\neg\text{nyf}\Delta_{\text{qew}}(S) \leq k$ .  $\neg\text{nyf}\sharp_{\text{qpw}}(S) \leq k$  implique  $\neg\text{nyf}\Delta_{\text{qpw}}(S) \leq k$ .

Et par le principe H.S.E.A.A. et le fait qu'on peut toujours ajouter l'adjacence entre les deux parties contractées juste avant :

**Lemme 5.8.**  $\neg\text{nyf}\Delta_{\text{qpw}}(S) \leq k$  implique  $\neg\text{nyf}\Delta_{\text{qew}}(S) \leq k + 1$ .  $\neg\text{nyf}\sharp_{\text{qpw}}(S) \leq k$  implique  $\neg\text{nyf}\sharp_{\text{qew}}(S) \leq k + 1$ .

Toujours par la construction de l'exemple 1.3 dans Dreier and Toruńczyk (2025), on a :

**Lemme 5.9.**  $\text{tw}_w(S) \leq k$  implique  $\neg\text{nyf}\Delta_{\text{qew}}(S) \leq k + 1$ .  $\text{tw}_w(S) \leq k$  implique  $\neg\text{nyf}\sharp_{\text{qew}}(S) \leq 2 \times k + 1$ .

Mais il est facile de voir que :

**Lemme 5.10.** Les graphes de degré borné ont une largeur non-nyf degré maximum questionnable et questionnable bornée.

Nous pensons que les graphes de degré borné ne sont pas de  $\neg\text{nyf}\sharp_{\text{qew}}$  bornée. Alors qu'il semble plausible que la largeur de fusion ne soit pas bornée pour certaines classes de graphes de  $\neg\text{nyf}\Delta_{\text{qew}}$  bornée.

Pour finir, nous ajoutons une contrainte de monotonie aux largeurs  $\neg\text{nyf}\Delta_{\text{qew}}$  et  $\neg\text{nyf}\sharp_{\text{qew}}$  en imposant qu'aucune arête non-nyf ne puisse ensuite devenir nyf sur un structure-item suivant. Cela définit les largeurs  $\text{m}\neg\text{nyf}\Delta_{\text{qew}}$  et  $\text{m}\neg\text{nyf}\sharp_{\text{qew}}$ .

$m\text{-nyf}\sharp_{\text{qew}}$  devient relativement faible car elle ne gère qu'un nombre fini global d'arêtes "non-modulaires". Par contre,  $m\text{-nyf}\Delta_{\text{qew}}$  fournit une quatrième largeur équivalente à la largeur de jumeaux.

**Lemme 5.11.**  $m\text{-nyf}\Delta_{\text{qew}}(S) \leq k$  implique  $m\text{-nyf}\Delta_{\text{qpw}}(S) \leq k$ .  $m\text{-nyf}\sharp_{\text{qew}}(S) \leq k$  implique  $m\text{-nyf}\sharp_{\text{qpw}}(S) \leq k$ .

**Lemme 5.12.**  $m\text{-nyf}\sharp_{\text{qew}}(S) \leq k$  implique  $m\text{-nyf}\Delta_{\text{qew}}(S) \leq k$ .  $m\text{-nyf}\sharp_{\text{qpw}}(S) \leq k$  implique  $m\text{-nyf}\Delta_{\text{qpw}}(S) \leq k$ .

**Lemme 5.13.**  $m\text{-nyf}\Delta_{\text{qpw}}(S) \leq k$  implique  $m\text{-nyf}\Delta_{\text{qew}}(S) \leq k+1$ .  $m\text{-nyf}\sharp_{\text{qpw}}(S) \leq k$  implique  $m\text{-nyf}\sharp_{\text{qew}}(S) \leq k+1$ .

**Lemme 5.14.**  $\text{tww}(S) \leq k$  implique  $m\text{-nyf}\Delta_{\text{qew}}(S) \leq k+1$ .

Par monotonie, il ne sert à rien de fixer des adjacences bien avant de contracter des sommets incidents (car cela ne fait qu'augmenter le degré maximum); donc on peut voir les arêtes non-nyf comme des arêtes rouges.

**Lemme 5.15.**  $m\text{-nyf}\Delta_{\text{qew}}(S) \leq k$  implique  $\text{tww}(S) \leq k$ .

Il semble que les largeurs étudiées aillent dans l'ordre du plus faible pouvoir de décomposition au plus grand pouvoir de décomposition de :

- $m\text{-nyf}\sharp_{\text{qew}} \approx m\text{-nyf}\sharp_{\text{qpw}}$ ,
- $\text{tww} = \text{twqw} \approx \text{wmw} = \text{wmqw} \approx m\text{-nyf}\Delta_{\text{qew}} \approx m\text{-nyf}\Delta_{\text{qpw}}$ ,
- $\neg\text{nyf}\sharp_{\text{qew}} \approx \neg\text{nyf}\sharp_{\text{qpw}}$ ,
- $\text{mw} = \text{mqw}$ ,
- à  $\neg\text{nyf}\Delta_{\text{qew}} \approx \neg\text{nyf}\Delta_{\text{qpw}}$ .

## 6 Conclusion

Les graphes de degré borné ont aussi une largeur arborescente questionnable équilibrée bijective bornée (voir Lyaudet (2022)); mais ce n'est pas le cas de la twin-width. Il serait intéressant de savoir comment se comparent la largeur de jumeaux et la largeur de fusion, ainsi que la largeur non-nyf degré maximum questionnable, avec les différentes variantes de largeur arborescente questionnable (voir Lyaudet (2025b)).

Ces traductions de largeurs dans le cadre du principe de premières différences ou de la questionnabilité nyf-pure pourraient sembler anecdotiques. Mais ces traductions elles-mêmes sont exprimables dans certaines logiques et elles ne manipulent que des suites d'éléments, donc des structures de "chemins" et non de graphes plus compliqués. Il est possible que des résultats généraux sur le principe de premières différences ou la questionnabilité nyf-pure permettent de classer la complexité du calcul de ces largeurs, entre celles qui sont dans P ou NC, ou celles qui sont NP-dures avec ou sans algorithmes d'approximation, etc.

Merci Dieu ! Merci Père ! Merci Jésus ! Merci Saint-Esprit !

## Références

- E. Bonnet, E. J. Kim, S. Thomassé, and R. Watrigant. Twin-width I : tractable FO model checking, 2020. URL <https://arxiv.org/abs/2004.14789>.
- G. Cantor. Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre. *Math. Ann.*, 46 : 481–512, 1895.
- J. Dreier and S. Toruńczyk. Merge-width and first-order model checking, 2025. URL <https://arxiv.org/abs/2502.18065>.
- F. Hausdorff. Untersuchungen über Ordnungstypen V. *Ber. über die Verhandlungen der Königl. Sächs. Ges. der Wiss. zu Leipzig. Math.-phys. Klasse*, 59 :105–159, 1907.
- L. Lyaudet. A class of orders with linear? time sorting algorithm. *CoRR*, abs/1809.00954, 2018. URL <http://arxiv.org/abs/1809.00954>.
- L. Lyaudet. On finite width questionable representations of orders. *CoRR*, abs/1903.02028, 2019. URL <http://arxiv.org/abs/1903.02028>.
- L. Lyaudet. First difference principle applied to modular/questionable-width, clique-width, and rank-width of binary structures. *preprint*, abs/202009, 2020. URL [https://lyaudet.eu/laurent/Publi/Journaux/LL2020LargeursStructuresBinaires/LL2020LargeursStructuresBinaires\\_v5.pdf](https://lyaudet.eu/laurent/Publi/Journaux/LL2020LargeursStructuresBinaires/LL2020LargeursStructuresBinaires_v5.pdf).
- L. Lyaudet. Diviser n’est pas régner? *preprint*, abs/202205, 2022. URL [https://lyaudet.eu/laurent/Publi/Journaux/LL2022DiviserNestPasRegner/LL2022DiviserNestPasRegner\\_v6.pdf](https://lyaudet.eu/laurent/Publi/Journaux/LL2022DiviserNestPasRegner/LL2022DiviserNestPasRegner_v6.pdf).
- L. Lyaudet. On non-bijective tree-questionable-width. *preprint*, abs/202506-4, 2025a. URL [https://lyaudet.eu/laurent/Publi/Journaux/LL2025LAQNonBijective/LL2025LAQNonBijective\\_en\\_v4.pdf](https://lyaudet.eu/laurent/Publi/Journaux/LL2025LAQNonBijective/LL2025LAQNonBijective_en_v4.pdf).
- L. Lyaudet. Sur la largeur arborescente questionnable non-bijective. *preprint*, abs/202506-3, 2025b. URL [https://lyaudet.eu/laurent/Publi/Journaux/LL2025LAQNonBijective/LL2025LAQNonBijective\\_fr\\_v4.pdf](https://lyaudet.eu/laurent/Publi/Journaux/LL2025LAQNonBijective/LL2025LAQNonBijective_fr_v4.pdf).
- W. Sierpiński. Généralisation d’un théorème de Cantor concernant les ensembles ordonnés dénombrables. *Fundamenta Mathematicae*, 18 :280–284, 1932.

## Archive

FR V1 2025/06/22 :  
[https://lyaudet.eu/laurent/Publi/Journaux/LL2025FDPTwinMergeWidth/LL2025FDPTwinMergeWidth\\_fr\\_v1.pdf](https://lyaudet.eu/laurent/Publi/Journaux/LL2025FDPTwinMergeWidth/LL2025FDPTwinMergeWidth_fr_v1.pdf)

**EN V1 2025/06/22 :**

[https://lyaudet.eu/laurent/Publi/Journaux/LL2025FDPTwinMergeWidth/LL2025FDPTwinMergeWidth\\_en\\_v1.pdf](https://lyaudet.eu/laurent/Publi/Journaux/LL2025FDPTwinMergeWidth/LL2025FDPTwinMergeWidth_en_v1.pdf)

**FR V2 2025/07/22 :**

[https://lyaudet.eu/laurent/Publi/Journaux/LL2025FDPTwinMergeWidth/LL2025FDPTwinMergeWidth\\_fr\\_v2.pdf](https://lyaudet.eu/laurent/Publi/Journaux/LL2025FDPTwinMergeWidth/LL2025FDPTwinMergeWidth_fr_v2.pdf)

**EN V2 2025/07/22 :**

[https://lyaudet.eu/laurent/Publi/Journaux/LL2025FDPTwinMergeWidth/LL2025FDPTwinMergeWidth\\_en\\_v2.pdf](https://lyaudet.eu/laurent/Publi/Journaux/LL2025FDPTwinMergeWidth/LL2025FDPTwinMergeWidth_en_v2.pdf)

**FR V3 2025/11/24 cette version :**

[https://lyaudet.eu/laurent/Publi/Journaux/LL2025FDPTwinMergeWidth/LL2025FDPTwinMergeWidth\\_fr\\_v3.pdf](https://lyaudet.eu/laurent/Publi/Journaux/LL2025FDPTwinMergeWidth/LL2025FDPTwinMergeWidth_fr_v3.pdf)

**EN V3 2025/11/24 :**

[https://lyaudet.eu/laurent/Publi/Journaux/LL2025FDPTwinMergeWidth/LL2025FDPTwinMergeWidth\\_en\\_v3.pdf](https://lyaudet.eu/laurent/Publi/Journaux/LL2025FDPTwinMergeWidth/LL2025FDPTwinMergeWidth_en_v3.pdf)