Sur la largeur arborescente questionnable non-bijective

Laurent Lyaudet*

12 juin 2025

Résumé

Dans cette note, nous montrons qu'il y a au moins 4 types de largeur arborescente questionnable non-bijective. L'étude de ces 4 types vient d'un exemple de décomposition arborescente questionnable de degré non-borné et de profondeur 2 pour toute structure binaire. Nous hiérarchisons ces types et tissons des liens avec la largeur arborescente questionnable bijective.

Version initiale : 2025/06/11 Version courante : 2025/06/12

Mots-clés : principe de première différence, structures binaires, 2-structures, graphes, largeur arborescente questionnable, décompositions hiérarchiques

1 Introduction

La largeur arborescente questionnable (bijective ou non-bijective) (équilibrée) a été introduite dans Lyaudet (2019). Nous donnons des variantes nouvelles non-bijectives, étudions les liens avec le degré maximum de l'arbre de décomposition et les liens avec le cas bijectif. Ce qui suit vient de l'étude en détail de :

Exemple. Soit S une structure binaire de cardinal n ; dans une décomposition non-bijective, on peut répéter chaque sommet ($n-1$ fois dans le cas fini), pour faire des "cerises" pour chaque adjacence entre deux sommets avec deux feuilles, une pour chaque sommet, puis un nœud interne qui les relie avec le bon type d'adjacence. Ensuite, on relie toutes ces "cerises" avec un unique nœud racine qui collecte toutes les adjacences.

Cet exemple marche ou non selon ce qu'on entend par principe de première différence sur un arbre. Notre exemple date de fin 2019 ou de début 2020, mais la clarification et ce qui suit est plus récent, car dans un premier temps nous avons juste eu le réflexe de nous concentrer sur le cas bijectif et de degré borné comme nous l'avons fait avec les arbres binaires dans Lyaudet (2022), Lyaudet (2025b) et Lyaudet (2025a).

*`https://lyaudet.eu/laurent/`, laurent.lyaudet@gmail.com

2 Définitions

Soit un ensemble de sommets V, une (V, k)-*suite-d'applications* est une suite d'applications (fonctions totales au sens mathématique) de V vers les sommets de structures binaires de cardinalité au plus k (une même structure binaire par application).

Il est possible dans les décompositions arborescentes questionnables d'avoir des nœuds de la décomposition qui sont associés à une suite d'applications vide (de longueur 0), mais cela complique l'exposé. Dans cet article, nous considérerons qu'il y a toujours au moins une application identité sur chaque nœud. Cette application identité envoie chaque sommet sur le sommet unique d'une structure binaire de cardinalité 1, cela simplifie la notion de première différence et aidera le lecteur à se faire une intuition.

Nous commençons par quelques détails techniques sur les intersections d'arbres.

Définition 2.1 (Arbre commun, Point de jonction, Arbre commun étendu)**.** *Soient A un arbre enraciné de racine r, A_1 un sous-arbre enraciné de A de même racine r et A_2 un sous-arbre enraciné de A de même racine r.*

On appelle arbre commun *de A_1 et A_2, noté $\mathrm{CT}(A_1, A_2)$, l'arbre induit par l'intersection des nœuds de A_1 et A_2.*

On dit qu'un nœud de $\mathrm{CT}(A_1, A_2)$ est un point de jonction *de $\mathrm{CT}(A_1, A_2)$ si ce nœud a un fils dans A_1 ou un fils dans A_2 qui n'est pas dans $\mathrm{CT}(A_1, A_2)$.*

On appelle arbre commun étendu *de A_1 et A_2, noté $\mathrm{ECT}(A_1, A_2)$, l'arbre obtenu à partir de $\mathrm{CT}(A_1, A_2)$ en ajoutant à tout point de jonction de $\mathrm{CT}(A_1, A_2)$ une feuille adjacente.*

De manière similaire, on définit un chemin feuille-racine comme étant un chemin d'une feuille de $\mathrm{CT}(A_1, A_2)$ vers la racine de $\mathrm{CT}(A_1, A_2)$ pour une paire $\{A_1, A_2\}$; et on définit un chemin feuille-racine étendu comme étant un chemin d'une feuille de $\mathrm{ECT}(A_1, A_2)$ vers la racine de $\mathrm{ECT}(A_1, A_2)$ pour une paire $\{A_1, A_2\}$.

Définition 2.2 (Décomposition arborescente questionnable)**.** *Soit S une structure binaire. Une (k, α, β)-*décomposition arborescente questionnable *de S est un triplet (A, ef, en) (A comme arbre, ef comme étiquetage des feuilles et en comme étiquetage des nœuds) :*

- *A est un arbre enraciné ;*
- *la fonction ef est une application surjective (une bijection dans le cas bijectif) des feuilles de A vers les sommets de S ;*
- *ainsi à chaque nœud interne $node$ est associé l'ensemble de sommets de S union des valeurs $ef(f)$ pour toutes les feuilles f sous le nœud $node$, ce qui définit $ef(node)$;*
- *en est une application ayant pour domaine les nœuds internes de A, telle que $en(node)$ est une $(ef(node), k)$-suite-d'applications ;*
- *en conséquence, à chaque sommet x de S correspond un sous-arbre (qui est un chemin dans le cas bijectif) de A, nous notons A_x ce sous-arbre, resp. chemin ;*
- *pour toute paire de sommets $\{x, y\}$, on va regarder le principe de première différence sur $\mathrm{CT}(A_x, A_y)$ ou $\mathrm{ECT}(A_x, A_y)$;*
- *soit C un chemin feuille-racine étendu ou non relativement à $\{x, y\}$; on peut ainsi définir la $(\{x, y\}, k)$-suite-d'applications obtenue en concaténant les*

$(ef(node), k)$-suites-d'applications restreintes à $\{x, y\}$ quand on prend les nœuds $node$ de C de la feuille vers la racine ; si une première différence entre l'image de x et de y dans cette suite d'applications existe, c'est la question *de C ; quand le chemin C a une question, elle doit correspondre à deux sommets de même type d'adjacence qu'entre x et y pour être valide ;*

- *pour les décompositions arborescentes questionnables de type 1, on demande que tout chemin feuille-racine étendu ait une question valide ;*
- *pour les décompositions arborescentes questionnables de type 2, on demande que tout chemin feuille-racine ait une question valide ;*
- *pour les décompositions arborescentes questionnables de type 3, on demande qu'au moins un chemin feuille-racine ait une question et que toutes les questions des chemins feuille-racine soient valides ;*
- *pour les décompositions arborescentes questionnables de type 4, on demande qu'au moins un chemin feuille-racine étendu ait une question et que toutes les questions des chemins feuille-racine étendu soient valides ;*
- *α est la profondeur de l'arbre A ;*
- *β est la profondeur de l'arbre étendu A' obtenu en remplaçant chaque nœud interne par un chemin de nœuds (un pour chaque application de la suite associée au nœud original).*

k est appelée la largeur de la décomposition ; α est appelée la profondeur structurelle de la décomposition ; β est appelée la profondeur logique de la décomposition. Dans le cas fini, le degré de la décomposition est le degré maximum des nœuds de A.

La définition originale donnée dans Lyaudet (2019) correspond aux décompositions arborescentes questionnables de type 2.

L'exemple introductif peut être réécrit :

Lemme 2.3. *Soit S une structure binaire (infinie), elle admet une $(2, 2, 2)$-décomposition arborescente questionnable de type 2, 3 et 4 de degré non borné.*

3 Comparaisons

Lemme 3.1. *Une décomposition arborescente questionnable de type 1 est aussi de type 2, de type 3 et de type 4.*

Lemme 3.2. *Une décomposition arborescente questionnable de type 2 est aussi de type 3.*

Lemme 3.3. *Une décomposition arborescente questionnable de type 4 est aussi de type 3.*

Preuve :

(i) En effet, si toutes les questions des chemins feuille-racine étendu sont valides, a fortiori, toutes les questions des chemins feuille-racine sont valides.

(ii) De plus, il existe toujours au moins un chemin feuille-racine qui contient un chemin feuille-racine étendu donné sauf sa feuille initiale, donc il contient sa question (valide).

(iii) Et l'existence d'au moins un chemin feuille-racine étendu à question valide implique celle d'un chemin feuille-racine à question valide. Soit c'est la même question et on conclut par (ii), soit c'est une différence/question avant dans la suite et on conclut par (i).

■

Toutes les autres inclusions sont fausses, voici des contre-exemples.

La décomposition en exemple qui a motivé cette article est de types 2, 3 et 4 mais pas 1.

La décomposition suivante est de types 2 et 3 mais pas 4 ni 1. Soit une structure binaire avec 3 sommets a, b et c, telle que a est adjacent à c, et sinon tout est non-adjacent. On fait une cerise avec deux feuilles pour a et b ; et on fixe la non-adjacence entre a et b. On relie la racine de cette cerise à la vraie racine de la décomposition qui a aussi un fils feuille a répété et un fils feuille c. La suite d'applications de la vraie racine met a adjacent à b et c (mais c'est couvert par la cerise entre a et b pour les types 2 et 3), puis met b (et a) non-adjacent à c.

La décomposition suivante est de types 3 et 4 mais pas 2 ni 1. Soit une structure binaire avec 2 sommets a, b, telle que a est adjacent à b. On fait une cerise avec deux feuilles pour a et b ; et on fixe l'adjacence entre a et b. On fait une deuxième cerise avec deux feuilles pour a et b ; et on ne fixe rien (application identité). On relie les racines des deux cerises à la vraie racine de la décomposition qui a aussi juste une application identité.

4 Résultats sur le degré

Lemme 4.1. *Si la décomposition arborescente questionnable est bijective, elle est à la fois de type 1, de type 2, de type 3 et de type 4.*

Preuve :

$\mathrm{CT}(A_x, A_y)$ est un chemin. $\mathrm{ECT}(A_x, A_y)$ est un chemin. Les deux suites d'applications sont quasi identiques modulo une application identité en préfixe. ■

Lemme 4.2. *Soit S une structure binaire finie. Une (k, α, β)-décomposition arborescente questionnable de type 1, resp. de type 4, de degré maximum Δ peut être convertie en une $(k, \alpha \times \lceil \lg(\Delta) \rceil, \beta \times \lceil \lg(\Delta) \rceil)$-décomposition arborescente questionnable de type 1, resp. de type 4, de degré deux.*

Preuve :

On peut séparer chaque nœud de degré supérieur à deux en une cerise de manière équilibrée. On met une application identité sur les deux feuilles de la cerise. Les questions ne seront donc pas sur ces feuilles. On ne crée pas de question, mais on crée/déplace des points de jonction vers les feuilles si et seulement si le nœud séparé était un point de jonction. Donc les nouveaux chemins feuille-racine étendu ont une question si et seulement s'il y en avait une depuis le point de jonction d'origine. Donc la condition d'avoir toujours une question sur chaque chemin feuille-racine étendu et qu'elle soit valide reste respectée pour le type 1. Et la condition d'avoir une question sur au moins un chemin feuille-racine étendu et qu'elle soit valide reste respectée pour le type 4. ∎

Corollaire 4.3. *Soit S une structure binaire finie de cardinal n, elle admet une $(2, \lceil 2 \times \lg(n) \rceil + 1, \lceil 2 \times \lg(n) \rceil + 1)$-décomposition arborescente questionnable de types 3 et 4 de degré deux.*

Corollaire 4.4. *Modulo un facteur logarithmique sur la profondeur, une décomposition arborescente questionnable bijective d'une structure binaire finie peut être convertie en une décomposition arborescente questionnable bijective de degré deux/binaire.*

Donc peu importe le degré quand on cherche des décompositions arborescentes questionnables bijectives équilibrées de manière polylogarithmique.

5 Élagage

Nous commençons par énoncer une évidence :

Lemme 5.1. *Si un nœud $node$ d'une décomposition arborescente questionnable de type 1 ou 2 a deux fils $node_1$ et $node_2$, tels que $ef(node_1) \subseteq ef(node_2)$, alors on peut supprimer tout le sous-arbre enraciné en $node_1$.*

Lemme 5.2. *Si une décomposition arborescente questionnable de type 1 a deux feuilles correspondant au même sommet, on peut en supprimer une et éventuellement fusionner son nœud parent $node$ avec son deuxième fils, si $node$ se retrouve à être de degré 1.*

Preuve :

Un élagage de feuille ne crée pas de point de jonction. Et comme la feuille est redondante, il reste au moins un point de jonction pour toute paire de sommets. Comme avec le type 1, tout point de jonction engendre une question valide, la propriété d'avoir encore une question valide reste vraie. ∎

Corollaire 5.3. *La largeur arborescente questionnable non-bijective de type 1 est égale à la largeur arborescente questionnable bijective.*

6 Conclusion

Après cette étude, seule la largeur arborescente questionnable non-bijective de type 2 équilibrée et de degré borné reste vraiment ouverte dans le cas non-bijectif. Les types 3 et 4 sont trop puissants et décomposent tout, peu importe les contraintes supplémentaires. Il reste aussi le problème ouvert plus classique de la largeur arborescente questionnable bijective. Beaucoup de choses sont paramétrables avec la largeur arborescente questionnable, surtout dans le cas non-bijectif. On pourrait encore davantage complexifier le problème en regardant diverses bornes sur le degré (bornes logarithmiques par exemple), ou des bornes sur la “surjectivité”, comme demander qu’un sommet de la structure binaire corresponde à au plus un nombre logarithmique de feuilles.

Voilà, c’est la fin de DAQ Ô DAQ ;) XD.

Merci Dieu ! Merci Père ! Merci Jésus ! Merci Saint-Esprit !

Références

L. Lyaudet. On finite width questionable representations of orders. *CoRR*, abs/1903.02028, 2019. URL http://arxiv.org/abs/1903.02028.

L. Lyaudet. Diviser n’est pas régner ? *preprint*, abs/202205, 2022. URL https://lyaudet.eu/laurent/Publi/Journaux/LL2022DiviserNestPasRegner/LL2022DiviserNestPasRegner_v6.pdf.

L. Lyaudet. On tree-width and tree-questionable-width. *preprint*, abs/202506-2, 2025a. URL https://lyaudet.eu/laurent/Publi/Journaux/LL2025TreewidthTreequestionablewidth/LL2025TreewidthTreequestionablewidth_en_v1.pdf.

L. Lyaudet. Sur la largeur arborescente et la largeur arborescente questionnable. *preprint*, abs/202506-1, 2025b. URL https://lyaudet.eu/laurent/Publi/Journaux/LL2025TreewidthTreequestionablewidth/LL2025TreewidthTreequestionablewidth_fr_v1.pdf.