Sur la largeur arborescente questionnable non-bijective

Laurent Lyaudet*

15 juin 2025

Résumé

Dans cet article, nous montrons qu'il y a une infinité de types de largeur arborescente questionnable non-bijective, dont 6 types principaux. L'étude de ces types vient d'un exemple de décomposition arborescente questionnable de degré non-borné et de profondeur 2 pour toute structure binaire. Nous hiérarchisons ces types et tissons des liens avec la largeur arborescente questionnable bijective.

Version initiale : 2025/06/11 Version courante : 2025/06/15

Mots-clés : principe de première différence, structures binaires, 2-structures, graphes, largeur arborescente questionnable, décompositions hiérarchiques

1 Introduction

La largeur arborescente questionnable (bijective ou non-bijective) (équilibrée) a été introduite dans Lyaudet (2019). Nous donnons des variantes nouvelles non-bijectives, étudions les liens avec le degré maximum de l'arbre de décomposition et les liens avec le cas bijectif. Ce qui suit vient de l'étude en détail de :

Exemple. Soit S une structure binaire de cardinal n ; dans une décomposition non-bijective, on peut répéter chaque sommet ($n-1$ fois dans le cas fini), pour faire des "cerises" pour chaque adjacence entre deux sommets avec deux feuilles, une pour chaque sommet, puis un nœud interne qui les relie avec le bon type d'adjacence. Ensuite, on relie toutes ces "cerises" avec un unique nœud racine qui collecte toutes les adjacences.

Cet exemple marche ou non selon ce qu'on entend par principe de première différence sur un arbre. Notre exemple date de fin 2019 ou de début 2020, mais la clarification et ce qui suit est plus récent, car dans un premier temps nous avons juste eu le réflexe de nous concentrer sur le cas bijectif et de degré borné comme nous l'avons fait avec les arbres binaires dans Lyaudet (2022), Lyaudet (2025b) et Lyaudet (2025a).

*`https://lyaudet.eu/laurent/`, laurent.lyaudet@gmail.com

2 Définitions

Soit un ensemble de sommets V, une (V, k)*-suite-d'applications* est une suite d'applications (fonctions totales au sens mathématique) de V vers les sommets de structures binaires de cardinalité au plus k (une même structure binaire par application).

Il est possible dans les décompositions arborescentes questionnables d'avoir des nœuds de la décomposition qui sont associés à une suite d'applications vide (de longueur 0), mais cela complique l'exposé. Dans cet article, nous considérerons qu'il y a toujours au moins une application identité sur chaque nœud. Cette application identité envoie chaque sommet sur le sommet unique d'une structure binaire de cardinalité 1, cela simplifie la notion de première différence et aidera le lecteur à se faire une intuition.

Nous commençons par quelques détails techniques sur les intersections d'arbres.

Définition 2.1 (Arbre commun (serré/moyen/large), Point de jonction (moyen/large), Chemin feuille-racine (serré/moyen/large))**.** *Soient A un arbre enraciné de racine r, A_1 un sous-arbre enraciné de A de même racine r et A_2 un sous-arbre enraciné de A de même racine r.*

On appelle arbre commun serré *de A_1 et A_2, noté* $\mathrm{TCT}(A_1, A_2)$*, l'arbre induit par l'intersection des nœuds de A_1 et A_2.*

On dit qu'un nœud de $\mathrm{TCT}(A_1, A_2)$ *est un* point de jonction moyen *de* $\mathrm{TCT}(A_1, A_2)$ *si ce nœud a un fils dans A_1 ou un fils dans A_2 qui n'est pas dans* $\mathrm{TCT}(A_1, A_2)$.

On dit qu'un nœud de $\mathrm{TCT}(A_1, A_2)$ *est un* point de jonction large *de* $\mathrm{TCT}(A_1, A_2)$ *si ce nœud a au moins deux fils dans l'arbre induit par l'union des nœuds de A_1 et A_2.*

On appelle arbre commun moyen *de A_1 et A_2, noté* $\mathrm{MCT}(A_1, A_2)$*, l'arbre obtenu à partir de* $\mathrm{TCT}(A_1, A_2)$ *en ajoutant à tout point de jonction moyen de* $\mathrm{TCT}(A_1, A_2)$ *une feuille adjacente.*

On appelle arbre commun large *de A_1 et A_2, noté* $\mathrm{WCT}(A_1, A_2)$*, l'arbre obtenu à partir de* $\mathrm{TCT}(A_1, A_2)$ *en ajoutant à tout point de jonction large de* $\mathrm{TCT}(A_1, A_2)$ *une feuille adjacente.*

De manière similaire, on définit un chemin feuille-racine serré *comme étant un chemin d'une feuille de* $\mathrm{TCT}(A_1, A_2)$ *vers la racine de* $\mathrm{TCT}(A_1, A_2)$ *pour une paire* $\{A_1, A_2\}$*; on définit un* chemin feuille-racine moyen *comme étant un chemin d'une feuille de* $\mathrm{MCT}(A_1, A_2)$ *vers la racine de* $\mathrm{MCT}(A_1, A_2)$ *pour une paire* $\{A_1, A_2\}$*; et on définit* un chemin feuille-racine large *comme étant un chemin d'une feuille de* $\mathrm{WCT}(A_1, A_2)$ *vers la racine de* $\mathrm{WCT}(A_1, A_2)$ *pour une paire* $\{A_1, A_2\}$.

(Il est tout à fait possible de présenter ce qui suit autrement en évitant de définir MCT et WCT et les chemins feuille-racine pour définir des chemins "point de jonction (serré/moyen/large)-racine". Il faut juste convenir qu'une feuille de TCT est un point de jonction serré. Mais cela a l'inconvénient d'utiliser des termes trop longs pour les chemins qui nous intéressent.)

Il y a plusieurs définitions qui généralisent les arbres enracinés dans le cas infini. Nous utilisons celle-ci : nous remplaçons l'arbre par un ordre partiel bien fondé, dont les éléments minimaux sont les feuilles ; un unique élément maximal est la racine ; pour deux nœuds n_1, n_2, les sections initiales qu'ils engendrent, $\mathrm{SI}(n_1), \mathrm{SI}(n_2)$, (sous-ensembles de nœuds inférieurs ou égaux à n_1, resp. n_2) sont soit disjoints (sous-arbres disjoints), ou l'un est contenu dans l'autre (ce qui indique que n_1 est un ancêtre ou un descendant de n_2). En conséquence, la section finale engendrée par n_1, $\mathrm{SF}(n_1)$, est toujours une chaîne/un chemin ayant la racine comme élément maximum. Les nœuds internes sont les éléments non-minimaux de cet ordre partiel. Dans le sous-ordre partiel induit par $\mathrm{SI}(n_1) \setminus \{n_1\}$ (qui n'a pas forcément d'élément maximum), on regarde l'ensemble des "sous-arbres complets" maximaux pour l'inclusion, c'est-à-dire que ce sont les sous-ensembles maximaux de nœuds $F \subseteq \mathrm{SI}(n_1) \setminus \{n_1\}$ tels que $\forall n_3, n_4 \in F$, si n_3 est incomparable avec n_4, alors $\exists n_5 \in F$ tel que $n_3 < n_5$ et $n_4 < n_5$; un tel sous-arbre est une section initiale engendrée par une chaîne ; on dit que ce sous-arbre est un "fils" de n_1 ; la cardinalité de cet ensemble de "fils"/sous-arbres maximaux pour l'inclusion définit le degré de n_1.

Définition 2.2 (Décomposition arborescente questionnable)**.** *Soit S une structure binaire. Une* (k, α, β)-décomposition arborescente questionnable *de S est un triplet* (A, ef, en) *(A comme arbre, ef comme étiquetage des feuilles et en comme étiquetage des nœuds) tel que :*

- *A est un arbre enraciné ;*
- *la fonction ef est une application surjective (une bijection dans le cas bijectif) des feuilles de A vers les sommets de S ;*
- *ainsi à chaque nœud interne node est associé l'ensemble de sommets de S union des valeurs $ef(f)$ pour toutes les feuilles f sous le nœud node, ce qui définit $ef(node)$;*
- *en est une application ayant pour domaine les nœuds internes de A, telle que $en(node)$ est une $(ef(node), k)$-suite-d'applications ;*
- *en conséquence, à chaque sommet x de S correspond un sous-arbre (qui est un chemin dans le cas bijectif) de A, nous notons A_x ce sous-arbre, resp. chemin ;*
- *pour toute paire de sommets $\{x, y\}$, on va regarder le principe de première différence sur* $\mathrm{TCT}(A_x, A_y)$, $\mathrm{MCT}(A_x, A_y)$ *ou* $\mathrm{WCT}(A_x, A_y)$ *;*
- *soit C un chemin feuille-racine serré, moyen ou large relativement à $\{x, y\}$; on peut ainsi définir la $(\{x, y\}, k)$-suite-d'applications obtenue en concaténant les $(ef(node), k)$-suites-d'applications restreintes à $\{x, y\}$ quand on prend les nœuds node de C de la feuille vers la racine ; si une première différence entre l'image de x et de y dans cette suite d'applications existe, c'est la* question *de C ; quand le chemin C a une question, elle doit correspondre à deux sommets de même type d'adjacence qu'entre x et y pour être valide ;*
- *on dit que la décomposition arborescente questionnable est serrée, resp. moyenne, resp. large, si toutes les questions des chemins feuille-racine serrés, resp. moyens, resp. larges, sont valides ;*
- *on dit que la décomposition arborescente questionnable est* 1*-serrée, resp.* 1*-moyenne, resp.* 1*-large, si elle est serrée, resp. moyenne, resp. large, et tous les chemins feuille-racine serrés, resp. moyens, resp. larges, ont une question valide ;*
- *dans le cas fini, si $0 < p \leq 1$, on dit que la décomposition arborescente questionnable est p-serrée, resp. p-moyenne, resp. p-large, si elle est serrée, resp. moyenne, resp. large, et pour toute paire de sommets la proportion de chemins feuille-racine serrés, resp. moyens, resp. larges, ayant une question valide est*

au moins p ;

- *on dit que la décomposition arborescente questionnable est ϵ-serrée, resp. ϵ-moyenne, resp. ϵ-large, si elle est serrée, resp. moyenne, resp. large, et pour toute paire de sommets au moins un chemin feuille-racine serré, resp. moyen, resp. large, a une question valide ;*
- *α est la profondeur de l'arbre A ;*
- *β est la profondeur de l'arbre étendu A' obtenu en remplaçant chaque nœud interne par un chemin de nœuds (un pour chaque application de la suite associée au nœud original).*

k est appelée la largeur de la décomposition ; α est appelée la profondeur structurelle de la décomposition ; β est appelée la profondeur logique de la décomposition. Le degré de la décomposition est le maximum (ou le supremum/la borne supérieure dans le cas infini) des degrés des nœuds de A.

La définition originale donnée dans Lyaudet (2019) correspond aux décompositions arborescentes questionnables 1-serrées.

L'exemple introductif peut être réécrit :

Lemme 2.3. *Soit S une structure binaire (infinie), elle admet une $(2, 2, 2)$-décomposition arborescente questionnable de degré non borné qui est 1-serrée, ϵ-serrée, ϵ-moyenne et ϵ-large.*

3 Comparaisons

Nous obtenons toutes les comparaisons pour les 6 types principaux : 1-serrée, 1-moyenne, 1-large, ϵ-serrée, ϵ-moyenne et ϵ-large. Nous donnons quelques pistes (lemmes et contre-exemples) pour les autres cas.

Lemme 3.1. *Si une décomposition arborescente questionnable est moyenne, alors elle est serrée. Si une décomposition arborescente questionnable est large, alors elle est moyenne et donc elle est serrée.*

Lemme 3.2. *Si une décomposition arborescente questionnable est 1-serrée, resp. 1-moyenne, resp. 1-large, alors elle est ϵ-serrée, resp. ϵ-moyenne, resp. ϵ-large.*

Dans le cas fini, si $0 < p_1 < p_2 \leq 1$ et si une décomposition arborescente questionnable est p_2-serrée, resp. p_2-moyenne, resp. p_2-large, alors elle est ϵ-serrée et p_1-serrée, resp. ϵ-moyenne et p_1-moyenne, resp. ϵ-large et p_1-large.

Lemme 3.3. *Si une décomposition arborescente questionnable est 1-moyenne, alors elle est 1-serrée. Si une décomposition arborescente questionnable est 1-large, alors elle est 1-moyenne et donc elle est 1-serrée.*

Lemme 3.4. *Une décomposition arborescente questionnable ϵ-moyenne est aussi ϵ-serrée.*

Preuve :

(i) Il existe toujours au moins un chemin feuille-racine serré (moyen et large à la fois) qui contient un chemin feuille-racine moyen donné sauf sa feuille initiale, donc il contient sa question (valide) s'il en a une.

(ii) Et l'existence d'au moins un chemin feuille-racine moyen à question valide implique celle d'un chemin feuille-racine serré à question valide. Soit c'est la même question et on conclut par (i), soit c'est une différence/question avant dans la suite et on conclut par le lemme 3.1.

■

Lemme 3.5. *Une décomposition arborescente questionnable ϵ-large est aussi ϵ-moyenne, donc ϵ-serrée.*

Preuve :

(i) Il existe toujours au moins un chemin feuille-racine moyen (serré et large à la fois) qui contient un chemin feuille-racine large donné sauf sa feuille initiale, donc il contient sa question (valide) s'il en a une.

(ii) Et l'existence d'au moins un chemin feuille-racine large à question valide implique celle d'un chemin feuille-racine moyen à question valide. Soit c'est la même question et on conclut par (i), soit c'est une différence/question avant dans la suite et on conclut par le lemme 3.1.

■

Toutes les autres inclusions pour les 6 types principaux sont fausses, voici des contre-exemples.

La décomposition en exemple qui a motivé cet article est 1-serrée, ϵ-serrée, ϵ-moyenne et ϵ-large, mais pas 1-moyenne, ni 1-large.

La décomposition suivante est de tous les types principaux sauf 1-large. Soit une structure binaire avec 2 sommets a, b, telle que a est adjacent à b. On fait une cerise avec deux feuilles pour a et b ; et on fixe l'adjacence entre a et b. On duplique cette cerise à l'identique. On relie les racines des deux cerises à la vraie racine de la décomposition qui a juste une application identité.

La décomposition suivante est 1-serrée et ϵ-serrée, mais pas 1-moyenne, ni 1-large, ni ϵ-moyenne, ni ϵ-large. Soit une structure binaire avec 3 sommets a, b et c, telle que a est adjacent à c ; et sinon tout est non-adjacent. On fait une cerise avec deux feuilles pour a et b ; et on fixe la non-adjacence entre a et b. On relie la racine de cette cerise à la vraie racine de la décomposition qui a aussi un fils feuille a répété et un fils feuille c. La suite d'applications de la vraie racine met a adjacent à b et c (mais c'est couvert par la cerise entre a et b pour les types 1-serrée et ϵ-serrée), puis met b (et a) non-adjacent à c.

La décomposition suivante est ϵ-serrée, ϵ-moyenne et ϵ-large, mais pas 1-serrée, ni 1-moyenne, ni 1-large. Soit une structure binaire avec 2 sommets a, b, telle que a est adjacent à b. On fait une cerise avec deux feuilles pour a et b ; et on fixe l'adjacence entre a et b. On fait une deuxième cerise avec deux feuilles pour a et b ; et on ne fixe rien (application identité). On relie les racines des deux cerises à la vraie racine de la décomposition qui a aussi juste une application identité.

La décomposition suivante est 1-serrée, ϵ-serrée, 1-moyenne et ϵ-moyenne, mais pas 1-large, ni ϵ-large. Soit une structure binaire avec 3 sommets a, b et c, telle que a est adjacent à c ; et sinon tout est non-adjacent. On fait une cerise avec deux feuilles pour a et b ; et on fixe la non-adjacence entre a et b. On duplique cette cerise et on relie les deux cerises. On relie l'union des deux cerises à la vraie racine de la décomposition qui a aussi un fils feuille c. La suite d'applications de la vraie racine met a adjacent à b et c (mais c'est couvert par les cerises entre a et b pour les types 1-serrée, ϵ-serrée, 1-moyenne et ϵ-moyenne), puis met b (et a) non-adjacent à c.

Nous avons donné 5 contre-exemples pour les inclusions. Si vous prenez le temps de dessiner le diagramme de Hasse et de mettre les traits de séparation liés aux contre-exemples, vous verrez que les trois derniers contre-exemples suffisent.

Le lemme 3.3 n'a pas d'équivalent dans le cas fini et avec les proportions intermédiaires de questions valides.

En particulier, p-large ou p-moyenne n'implique pas p-serrée. Il suffit de considérer par exemple une décomposition D d'une structure binaire avec 2 sommets a et b ; D a deux branches : une profonde et une "large" ; sur la racine de la branche profonde il y a une question valide. La branche profonde est un peigne qui commence par une cerise pour a et b, puis rajoute r feuilles avec a et rajoute r nœuds internes. La "branche" "large" contient s cerises pour a et b. Le dernier nœud interne de la branche profonde et toutes les cerises de la "branche" "large" sont reliées à la racine de D. D est $\frac{1}{s+1}$-serrée, $\frac{r+1}{r+s+1}$-moyenne et $\frac{r+1}{r+s+2}$-large.

Pour p-large n'implique pas p-moyenne, l'exemple est à peine plus compliqué. Il suffit de considérer par exemple une décomposition D d'une structure binaire avec 2 sommets a et b ; D est constituée d'un arbre binaire équilibré de profondeur l plus un dernier niveau fait de cerises pour a et b ; la racine de cet arbre contient une question valide ; cet arbre est ensuite suivi vers la racine de D d'un peigne qui rajoute s feuilles avec a et rajoute s nœuds internes. Le dernier nœud interne ajouté est la racine de D. D est $\frac{2^l}{2^l+s}$-moyenne et $\frac{2^{l+1}-1}{2^{l+1}-1+s}$-large. Donc pour $s = 2^{l+1}$, on obtient environ $\frac{1}{3}$-moyenne et $\frac{1}{2}$-large. Et pour $s = 2^{l+h}$, on obtient $\frac{1}{2^h+1}$-moyenne et $\frac{1-\frac{1}{2^{l+1}}}{2^{h-1}+1-\frac{1}{2^{l+1}}}$-large. Donc le coefficient pour passer de large à moyen est $\frac{1}{2^h+1} \times \frac{2^{h-1}+1-\frac{1}{2^{l+1}}}{1-\frac{1}{2^{l+1}}} = \frac{2^{h-1}+1-\frac{1}{2^{l+1}}}{2^h+1} \times \frac{1}{1-\frac{1}{2^{l+1}}}$. Pour tout $l \geq 0$, $\frac{2^{h-1}+1-\frac{1}{2^{l+1}}}{2^h+1}$ tend vers $\frac{1}{2}$ quand on augmente h ; $\frac{1}{1-\frac{1}{2^{l+1}}}$ tend vers 1 quand on augmente l ; donc on peut faire tendre le tout vers $\frac{1}{2}$ par valeurs supérieures.

Ce dernier contre-exemple peut être décortiqué pour montrer que p-large implique $\frac{p}{2}$-moyenne.

Lemme 3.6. *Dans le cas fini, si $0 < p \leq 1$ et si une décomposition arborescente questionnable est p-large, alors elle est $\frac{p}{2}$-moyenne.*

Preuve :

Nous allons montrer que le contre-exemple ci-dessus est optimal. Remarquons tout d'abord qu'un contre-exemple sur une structure binaire avec plus de deux sommets peut être ramené à un contre-exemple avec seulement deux sommets, puisque le ratio minimum doit forcément être atteint pour une paire de sommets donnée ; donc on peut élaguer la décomposition pour ne garder que l'union des arbres des deux sommets. Appelons les a et b. Comme il ne sert à rien d'avoir une application qui fixe un mauvais type d'adjacence entre a et b, on peut supposer que pour tout nœud, on a soit une unique application identité, soit une unique application qui fixe le bon type d'adjacence pour tous les chemins issus de points de jonction plus bas dans l'arbre. Soient cmv le nombre de chemins feuille-racine moyens avec question valide, cms le nombre de chemins feuille-racine moyens sans question, clv le nombre de chemins feuille-racine larges avec question valide et cls le nombre de chemins feuille-racine larges sans question. Le contre-exemple est $\frac{cmv}{cmv+cms}$-moyen et $\frac{clv}{clv+cls}$-large. Le but du contre-exemple est de minimiser $\frac{cmv\times(clv+cls)}{(cmv+cms)\times clv}$. Comme un point de jonction moyen est aussi un point de jonction large, les chemins feuille-racine moyens sans question ne peuvent pas être plus nombreux que les chemins feuille-racine larges sans question : $cms \leq cls$. Donc plus cms se rapproche de cls, plus le ratio diminue. Cela montre que le paramètre s de notre contre-exemple est optimal, puisqu'il atteint l'égalité. On peut donc simplifier le ratio par $\frac{cmv\times(clv+cms)}{(cmv+cms)\times clv} = \frac{cmv\times clv+cmv\times cms}{cmv\times clv+cms\times clv} = \frac{cmv\times clv+cms\times cmv}{cmv\times clv+cms\times clv}$. De même, $cmv \leq clv$, mais cette fois on veut obtenir une valeur de clv la plus grande possible par rapport à cmv pour faire baisser le ratio. Regardons maintenant la structure des sous-arbres avec question valide. Par minimalité du contre-exemple, en dehors de ses feuilles, tous ses nœuds sont dans TCT. Donc tous les nœuds internes sont points de jonction larges. Et si un nœud qui n'a que des feuilles comme fils est de degré supérieur à 2, on voit tout de suite que l'on peut supprimer au moins un fils. Donc si les feuilles sont le niveau 0, la condition d'être dans TCT et d'être de degré deux est vraie au niveau 1. Par induction sur les niveaux, si un nœud plus haut dans l'arbre a plus de deux fils, on peut les séparer pour faire une cerise dont la racine est un point de jonction large mais pas moyen et au plus une feuille de la cerise est point de jonction moyen (si le nœud séparé l'était), la deuxième feuille étant toujours point de jonction large. Donc cela augmente clv d'un, mais pas cmv. C'est aussi le cas, si un seul des deux fils est une feuille et qu'on le remplace par une cerise a, b. Donc, un contre-exemple optimal n'a pour "branches valides" que des arbres binaires terminés par des cerises a, b dont les seuls nœuds qui sont points de jonction moyen sont ceux de niveau 1. S'il y a plusieurs branches de ce type, en déplacer une pour la "greffer" sur une autre à la place d'une cerise fait disparaître un point de jonction moyen, éventuellement compensé par un autre crée après avoir élagué le point d'attache d'origine de la branche. Donc notre contre-exemple avec un arbre binaire valide suivi d'un peigne non-valide est optimal. Et il suffit de constater que l'on n'atteint jamais le ratio $\frac{cmv}{clv} > \frac{1}{2}$, mais qu'on s'en approche aussi prêt qu'on veut avec des arbres binaires équilibrés. ■

4 Résultats sur le degré

Lemme 4.1. *Si une décomposition arborescente questionnable est bijective, elle est de tous les types (les 6 types principaux et les autres types pour le cas fini).*

Preuve :

$\mathrm{TCT}(A_x, A_y)$ est un chemin. $\mathrm{MCT}(A_x, A_y) = \mathrm{WCT}(A_x, A_y)$ est un chemin. Les deux suites d'applications sont quasi identiques modulo une application identité en préfixe.

■

Lemme 4.2. *Soit S une structure binaire finie. Une (k, α, β)-décomposition arborescente questionnable 1-moyenne, resp. ϵ-moyenne, resp. 1-large, resp. ϵ-large, de degré maximum Δ peut être convertie en une $(k, \alpha \times \lceil \lg(\Delta) \rceil, \beta \times \lceil \lg(\Delta) \rceil)$-décomposition arborescente questionnable 1-moyenne, resp. ϵ-moyenne, resp. 1-large, resp. ϵ-large, de degré deux.*

Preuve :

On peut séparer chaque nœud de degré supérieur à deux en une cerise de manière équilibrée. On met une application identité sur les deux feuilles de la cerise. Les questions ne seront donc pas sur ces feuilles.

Tout le raisonnement qui suit marche pour toute paire de sommets $\{x, y\}$.

On ne crée pas de question, mais on crée/déplace des points de jonction vers les feuilles seulement si le nœud séparé était un point de jonction. En effet, si un point de jonction moyen apparaît sur une feuille de la cerise, c'est qu'au moins un de ses fils est dans A_x mais pas dans A_y (ou dans A_y mais pas dans A_x) ; comme ce fils était un fils de la racine de la cerise, elle était bien un point de jonction moyen. De même, si un point de jonction large apparaît sur une feuille de la cerise, c'est qu'au moins deux de ses fils sont dans l'union de A_x et A_y ; comme ces fils étaient des fils de la racine de la cerise, elle était bien un point de jonction large.

Donc les nouveaux chemins feuille-racine moyens, resp. larges, ont une question si et seulement s'il y en avait une depuis le point de jonction moyen, resp. large, d'origine. Donc la condition d'avoir toujours une question sur chaque chemin feuille-racine moyen, resp. large, et qu'elle soit valide reste respectée pour 1-moyenne, resp. 1-large. Et la condition d'avoir une question sur au moins un chemin feuille-racine moyen, resp. large, et qu'elle soit valide reste respectée pour ϵ-moyenne, resp. ϵ-large.

■

Corollaire 4.3. *Soit S une structure binaire finie de cardinal n, elle admet une $(2, \lceil 2 \times \lg(n) \rceil + 1, \lceil 2 \times \lg(n) \rceil + 1)$-décomposition arborescente questionnable ϵ-serrée, ϵ-moyenne et ϵ-large de degré deux.*

Corollaire 4.4. *Modulo un facteur logarithmique sur la profondeur, une décomposition arborescente questionnable bijective d'une structure binaire finie peut être convertie en une décomposition arborescente questionnable bijective de degré deux/binaire.*

Donc peu importe le degré quand on cherche des décompositions arborescentes questionnables bijectives équilibrées de manière polylogarithmique.

5 Élagage

Nous commençons par énoncer une évidence :

Lemme 5.1. *Si un nœud* $node$ *d'une décomposition arborescente questionnable* 1*-serrée,* 1*-moyenne ou* 1*-large a deux fils* $node_1$ *et* $node_2$*, tels que* $ef(node_1) \subseteq ef(node_2)$*, alors on peut supprimer tout le sous-arbre enraciné en* $node_1$*.*

Lemme 5.2. *Si une décomposition arborescente questionnable* 1*-large a deux feuilles correspondant au même sommet, on peut en supprimer une et éventuellement fusionner son nœud parent* $node$ *avec son deuxième fils, si* $node$ *se retrouve à être de degré 1.*

Preuve :

Un élagage de feuille ne crée pas de point de jonction large (mais un point de jonction large peut devenir un point de jonction moyen, ce qui exclut ce résultat pour 1-moyen). Et comme la feuille est redondante, il reste au moins un point de jonction large pour toute paire de sommets. Comme avec le type 1-large, tout point de jonction engendre une question valide, la propriété d'avoir encore une question valide reste vraie.

■

Corollaire 5.3. *La largeur arborescente questionnable non-bijective* 1*-large est égale à la largeur arborescente questionnable bijective.*

6 Conclusion

Après cette étude, seules les largeurs arborescentes questionnables suivantes restent vraiment ouvertes dans le cas non-bijectif : celle 1-serrée, équilibrée et de degré borné ; celle 1-moyenne équilibrée. Les types "ϵ" sont trop puissants et décomposent tout, peu importe les contraintes supplémentaires. Il reste aussi le problème ouvert plus classique de la largeur arborescente questionnable bijective. Nos contre-exemples comportaient beaucoup de structures redondantes et un peu stupides ; il est possible que des procédures de canonisation des décompositions aboutissent à des égalités de certains types, une fois canonisés. Les résultats d'élagage sont un premier pas dans cette direction, mais il faudra sans doute des résultats de transformation plus complexes. Beaucoup de choses sont paramétrables avec la largeur arborescente questionnable, surtout dans le cas non-bijectif. On pourrait encore davantage complexifier le problème en regardant diverses bornes sur le degré (bornes logarithmiques par exemple), ou des bornes sur la "surjectivité", comme demander qu'un sommet de la structure binaire corresponde à au plus un nombre logarithmique de feuilles. On pourrait même autoriser des questions invalides, et se contenter de vouloir une majorité de questions valides ; dans ce cas ou bien pour les variantes avec proportion, on pourrait étudier des échantillonnages probabilistes, etc.

Voilà, c'est la fin de DAQ Ô DAQ ;) XD.

Merci Dieu ! Merci Père ! Merci Jésus ! Merci Saint-Esprit !

Références

L. Lyaudet. On finite width questionable representations of orders. *CoRR*, abs/1903.02028, 2019. URL http://arxiv.org/abs/1903.02028.

L. Lyaudet. Diviser n'est pas régner ? *preprint*, abs/202205, 2022. URL https://lyaudet.eu/laurent/Publi/Journaux/LL2022DiviserNestPasRegner/LL2022DiviserNestPasRegner_v6.pdf.

L. Lyaudet. On tree-width and tree-questionable-width. *preprint*, abs/202506-2, 2025a. URL https://lyaudet.eu/laurent/Publi/Journaux/LL2025TreewidthTreequestionablewidth/LL2025TreewidthTreequestionablewidth_en_v1.pdf.

L. Lyaudet. Sur la largeur arborescente et la largeur arborescente questionnable. *preprint*, abs/202506-1, 2025b. URL https://lyaudet.eu/laurent/Publi/Journaux/LL2025TreewidthTreequestionablewidth/LL2025TreewidthTreequestionablewidth_fr_v1.pdf.