

Sur la largeur arborescente questionnable non-bijective

Laurent Lyaudet*

24 novembre 2025

Résumé

Dans cet article, nous montrons qu’il y a une infinité de types de largeur arborescente questionnable non-bijective, dont 8 types principaux. L’étude de ces types vient d’un exemple de décomposition arborescente questionnable de degré non-borné et de profondeur 2 pour toute structure binaire. Nous hiérarchisons ces types et tissons des liens avec la largeur arborescente questionnable bijective.

Version initiale : 2025/06/11 Version courante : 2025/11/24

Mots-clés : principe de première différence, principe de premières différences, structures binaires, 2-structures, graphes, largeur arborescente questionnable, décompositions hiérarchiques

1 Introduction

La largeur arborescente questionnable (bijective ou non-bijective) (équilibrée) a été introduite dans Lyaudet (2019). Nous donnons des variantes nouvelles non-bijectives, étudions les liens avec le degré maximum de l’arbre de décomposition et les liens avec le cas bijectif. Ce qui suit vient de l’étude en détail de :

Exemple 1.1. *Soit S une structure binaire de cardinal n ; dans une décomposition non-bijective, on peut répéter chaque sommet ($n - 1$ fois dans le cas fini), pour faire des “cerises” pour chaque adjacence entre deux sommets avec deux feuilles, une pour chaque sommet, puis un nœud interne qui les relie avec le bon type d’adjacence. Ensuite, on relie toutes ces “cerises” avec un unique nœud racine qui collecte toutes les adjacences.*

Cet exemple marche ou non selon ce qu’on entend par principe de premières différences sur un arbre. (Dans nos articles précédents, nous parlions de principe de première différence au singulier, car nous avions mémorisé cette orthographe au singulier après avoir lu l’article Sierpiński (1932). Cette erreur était renforcée par le fait que dans le cas bijectif, il y a bien une unique différence pour chaque paire de sommets, tout comme

*<https://lyaudet.eu/laurent/>, laurent.lyaudet@gmail.com

dans les travaux de Sierpiński. Nos travaux dans le cas non-bijectif donnent un nouveau sens à ce pluriel.) Notre exemple date de fin 2019 ou de début 2020, mais la clarification et ce qui suit est plus récent, car dans un premier temps nous avons juste eu le réflexe de nous concentrer sur le cas bijectif et de degré borné comme nous l'avons fait avec les arbres binaires dans Lyaudet (2022), Lyaudet (2025b) et Lyaudet (2025a).

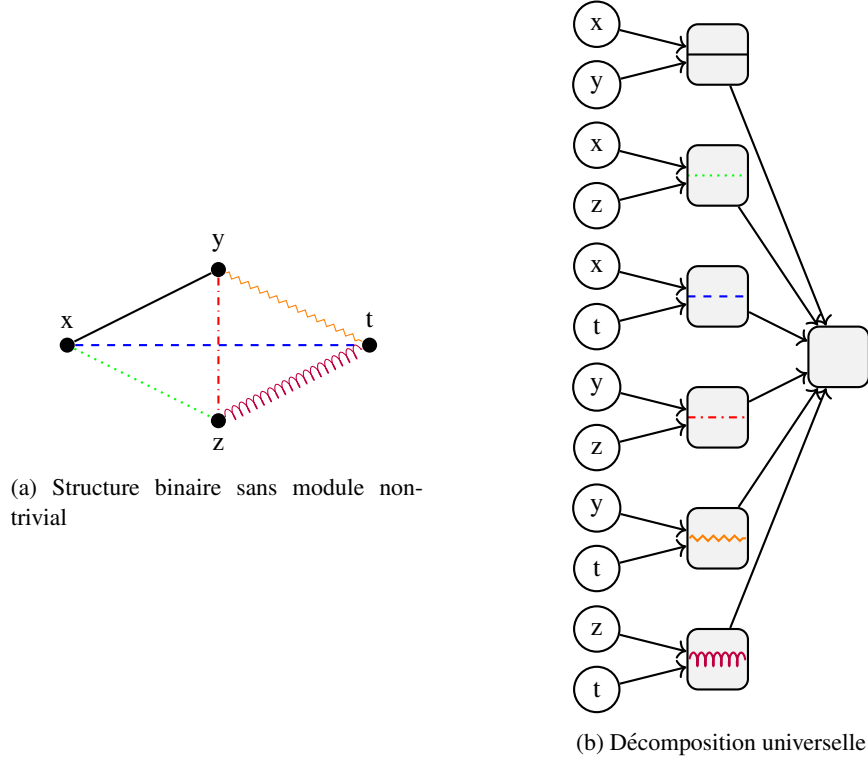


FIGURE 1 – Exemple 1.1

2 Définitions

Dans cet article, les lettres x , y et z correspondront à des sommets d'une structure binaire. Tandis que la lettre u correspondra à des nœuds d'un arbre/d'une décomposition arborescente questionnable (u , c'est un peu comme n à l'envers, mais n sert déjà pour la cardinalité de la structure binaire décomposée).

Définition 2.1 (Suite-d'applications). *Soit un ensemble de sommets V , une (V) -suite-d'applications est une suite d'applications (fonctions totales au sens mathématique) de V vers les sommets de structures binaires (une même structure binaire par application). Le supremum des cardinaux des structures binaires images, noté κ , est appelé la*

largeur de la suite d'applications. La longueur de la suite d'applications est notée λ . On parle alors de (V, κ, λ) -suite-d'applications.

Nous commençons par quelques détails techniques sur les intersections d'arbres.

Définition 2.2 (Arbre commun, Point de jonction (serré/court/moyen/large), Chemin montant (serré/court/moyen/large), Chemin feuille-racine). Soient A un arbre enraciné de racine r , A_1 un sous-arbre enraciné de A de même racine r et A_2 un sous-arbre enraciné de A de même racine r , tels qu'aucune feuille de A n'est à la fois dans A_1 et A_2 . On appelle arbre commun de A_1 et A_2 , noté $\text{CT}(A_1, A_2)$, l'arbre induit par l'intersection des nœuds de A_1 et A_2 .

On dit qu'une feuille de $\text{CT}(A_1, A_2)$ est un point de jonction serré de $\text{CT}(A_1, A_2)$.

On dit qu'un nœud de $\text{CT}(A_1, A_2)$ est un point de jonction court de $\text{CT}(A_1, A_2)$ si ce nœud a un fils dans A_1 qui n'est pas dans $\text{CT}(A_1, A_2)$ et un fils dans A_2 qui n'est pas dans $\text{CT}(A_1, A_2)$.

On dit qu'un nœud de $\text{CT}(A_1, A_2)$ est un point de jonction moyen de $\text{CT}(A_1, A_2)$ si ce nœud a un fils dans A_1 ou un fils dans A_2 qui n'est pas dans $\text{CT}(A_1, A_2)$.

On dit qu'un nœud de $\text{CT}(A_1, A_2)$ est un point de jonction large de $\text{CT}(A_1, A_2)$ si ce nœud a au moins deux fils dans l'arbre induit par l'union des nœuds de A_1 et A_2 .

De manière similaire, on définit un chemin montant serré, resp. court, resp. moyen, resp. large, comme étant un chemin orienté d'un point de jonction serré, resp. court, resp. moyen, resp. large, de $\text{CT}(A_1, A_2)$ vers la racine de $\text{CT}(A_1, A_2)$ pour une paire $\{A_1, A_2\}$. Donc un chemin montant serré est un chemin feuille-racine.

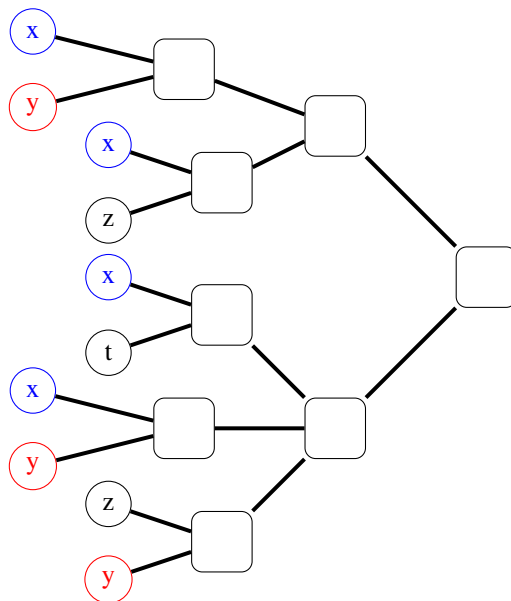


FIGURE 2 – Arbre de décomposition

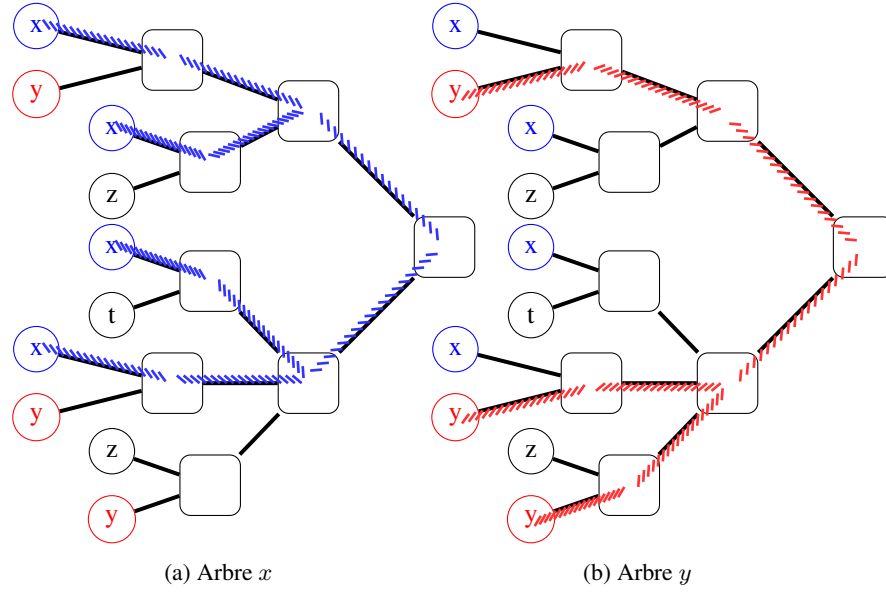


FIGURE 3 – Arbres induits par deux sommets

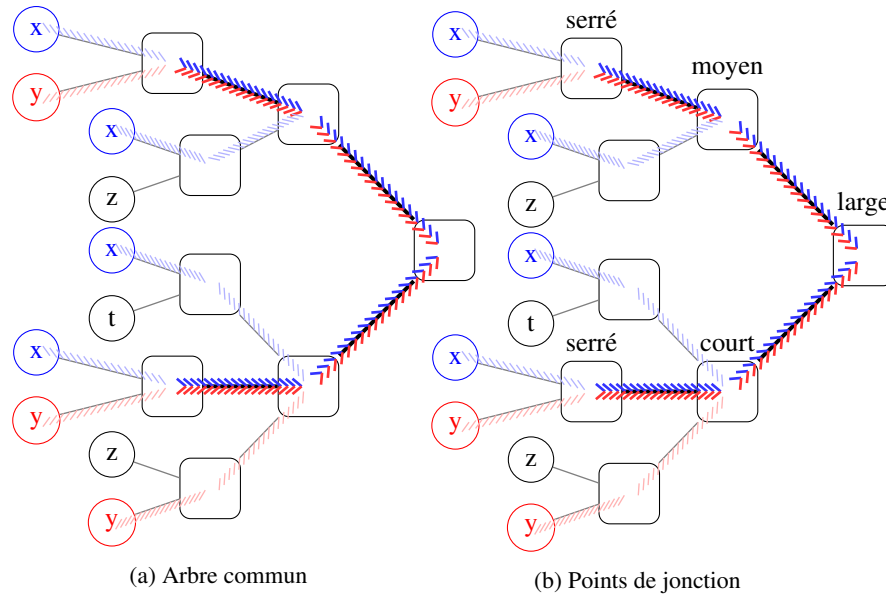


FIGURE 4 – Arbre commun et points de jonction

Lemme 2.3. *Un point de jonction serré est un point de jonction court. Un point de jonction court est un point de jonction moyen. Un point de jonction moyen est un point*

de jonction large.

Lemme 2.4. *Un chemin montant serré est un chemin montant court. Un chemin montant court est un chemin montant moyen. Un chemin montant moyen est un chemin montant large. Donc un chemin feuille-racine est serré, court, moyen et large.*

Lemme 2.5. *Tout chemin montant (serré, court, moyen ou large) est inclus dans au moins un chemin feuille-racine.*

Il y a plusieurs définitions qui généralisent les arbres enracinés dans le cas infini. Nous utilisons celle-ci : nous remplaçons l'arbre par un ordre partiel bien fondé, dont les éléments minimaux sont les feuilles ; un unique élément maximum est la racine ; pour deux nœuds u_1, u_2 , les sections initiales qu'ils engendrent, $SI(u_1), SI(u_2)$, (sous-ensembles de nœuds inférieurs ou égaux à u_1 , resp. u_2) sont soit disjoints (sous-arbres disjoints), ou l'un est contenu dans l'autre (ce qui indique que u_1 est un ancêtre ou un descendant de u_2). En conséquence, la section finale engendrée par u_1 , $SF(u_1)$, est toujours une chaîne/un chemin ayant la racine comme élément maximum. Les nœuds internes sont les éléments non-minimaux de cet ordre partiel. Dans le sous-ordre partiel induit par $SI(u_1) \setminus \{u_1\}$ (qui n'a pas forcément d'élément maximal), on regarde l'ensemble des "sous-arbres complets" maximaux pour l'inclusion, c'est-à-dire que ce sont les sous-ensembles maximaux de nœuds $F \subseteq SI(u_1) \setminus \{u_1\}$ tels que $\forall u_3, u_4 \in F$, si u_3 est incomparable avec u_4 , alors $\exists u_5 \in F$ tel que $u_3 < u_5$ et $u_4 < u_5$; un tel sous-arbre est une section initiale engendrée par une chaîne ; on dit que ce sous-arbre est un "fils" de u_1 ; la cardinalité de cet ensemble de "fils"/sous-arbres maximaux pour l'inclusion définit le degré de u_1 . Quand on raisonne sur des "fils" dans le cas infini, puisque chaque fils est un ensemble de nœuds et non un unique nœud, on considère que c'est le "même" fils quand les deux ensembles de nœuds s'intersectent. La lectrice pourra vérifier qu'à aucun moment dans les raisonnements de l'article, on ne se retrouve avec un "fils" selon un premier contexte qui intersecte deux autres "fils" selon un deuxième contexte, ce qui valide les définitions de points de jonction et tout le reste.

Définition 2.6 (Décomposition arborescente questionnable). *Soit S une structure binaire. Une décomposition arborescente questionnable D de S est un triplet (A, ef, en) (A comme arbre, ef comme étiquetage des feuilles et en comme étiquetage des nœuds) tel que :*

- A est un arbre enraciné ;
- la fonction ef est une application surjective (une bijection dans le cas bijectif) des feuilles de A vers les sommets de S ;
- ainsi à chaque nœud interne u est associé l'ensemble de sommets de S union des valeurs $ef(f)$ pour toutes les feuilles f sous le nœud u , ce qui définit $ef(u)$;
- en est une application ayant pour domaine les nœuds internes de A , telle que $en(u)$ est une $(ef(u))$ -suite-d'applications (Il est possible dans les décompositions arborescentes questionnables d'avoir des nœuds de la décomposition qui sont associés à une suite d'applications vide/de longueur 0.) ;
- en conséquence, à chaque sommet x de S correspond un sous-arbre (qui est un chemin dans le cas bijectif) de A , nous notons A_x ce sous-arbre, resp. chemin ;
- pour toute paire de sommets $\{x, y\}$, on va regarder le principe de premières différences sur $CT(A_x, A_y)$, selon les différents points de jonction ;

- soit C un chemin montant serré, court, moyen ou large relativement à $\{x, y\}$; on peut ainsi définir la $(\{x, y\})$ -suite-d'applications obtenue en concaténant les $(ef(u))$ -suites-d'applications restreintes à $\{x, y\}$ quand on prend les nœuds u de C du point de jonction vers la racine; si une première différence entre l'image de x et de y dans cette suite d'applications existe, c'est la question de C ; quand le chemin C a une question, elle doit correspondre à deux sommets de même type d'adjacence qu'entre x et y pour être valide;
- on dit que la décomposition arborescente questionnable est serrée, resp. courte, resp. moyenne, resp. large, si toutes les questions des chemins montants serrés, resp. courts, resp. moyens, resp. larges, sont valides;
- on dit que la décomposition arborescente questionnable est 1-serrée, resp. 1-courte, resp. 1-moyenne, resp. 1-large, si elle est serrée, resp. courte, resp. moyenne, resp. large, et tous les chemins montants serrés, resp. courts, resp. moyens, resp. larges, ont une question valide;
- dans le cas fini, si $0 < p \leq 1$, on dit que la décomposition arborescente questionnable est p -serrée, resp. p -courte, resp. p -moyenne, resp. p -large, si elle est serrée, resp. courte, resp. moyenne, resp. large, et pour toute paire de sommets la proportion de chemins montants serrés, resp. courts, resp. moyens, resp. larges, ayant une question valide est au moins p ;
- on dit que la décomposition arborescente questionnable est ϵ -serrée, resp. ϵ -courte, resp. ϵ -moyenne, resp. ϵ -large, si elle est serrée, resp. courte, resp. moyenne, resp. large, et pour toute paire de sommets au moins un chemin montant serré, resp. court, resp. moyen, resp. large, a une question valide.

On définit à partir de D les paramètres suivants :

- K est le supremum des largeurs des suites d'applications de chaque nœud de A . K est appelée la largeur de la décomposition (c'est un cardinal);
- Λ est le supremum des longueurs des suites d'applications de chaque nœud de A . Λ est appelée la longueur d'application de la décomposition (c'est un ordinal). Donc on a uniquement des $(V, \leq K, \leq \Lambda)$ -suites-d'applications sur les nœuds de A ;
- α est la profondeur de l'arbre A . α est appelée la profondeur structurelle de la décomposition (c'est un ordinal);
- β est la profondeur de l'arbre étendu A' obtenu en remplaçant chaque nœud interne par un chemin de nœuds, un pour chaque application de la suite associée au nœud original. Si cette suite est vide, on ne garde pas le nœud, ce qui peut poser problème s'il s'agit de la racine; on garde donc la racine et aussi les feuilles et si la profondeur n'est pas un ordinal limite, on redéfinit β par l'ordinal prédécesseur de la profondeur ("profondeur - 1"). Cette profondeur est donc le supremum des longueurs des suites d'application obtenues par concaténation sur un chemin feuille-racine. β est appelée la profondeur d'application de la décomposition (c'est un ordinal);
- γ est la profondeur de l'arbre étendu A'' obtenu en remplaçant chaque nœud interne par un chemin de nœuds, un pour chaque application de la suite associée au nœud original. Si cette suite est vide, on garde au moins un nœud (C est un peu comme considérer que l'on a toujours une application "identité" sur chaque nœud sans application. Cette application identité envoie chaque som-

met sur le sommet unique d'une structure binaire de cardinalité 1 et ne crée donc pas de (première) différence.). γ est appelée la profondeur combinée de la décomposition (c'est un ordinal) (Nous avons abandonné la notion de profondeur logique, qui correspondait par manque de précision parfois à la profondeur d'application parfois à la profondeur combinée, et dont le nom n'était pas très bien choisi.);

- Δ est le supremum des degrés des nœuds de A . Δ est appelé le degré de la décomposition (c'est un cardinal).
- σ est le supremum des cardinaux des ensembles de feuilles de A associés à chaque sommet par $e f^{-1}$. σ est appelée la surjectivité individuelle de la décomposition (c'est un cardinal).
- Σ est le cardinal de l'ensemble de feuilles de A . Σ est appelée la surjectivité globale de la décomposition (c'est un cardinal;)).

On dit alors que D est une $(K; \Lambda; \alpha, \beta, \gamma; \Delta; \sigma, \Sigma)$ -décomposition arborescente questionnable. Notons que l'on peut avoir $\alpha < \beta$ ou $\alpha > \beta$ et que l'on a toujours $\gamma \geq \max(\alpha, \beta)$ et $\Lambda \leq \beta$.

La définition originale donnée dans Lyaudet (2019) correspond aux décompositions arborescentes questionnables 1-serrées.

L'exemple introductif 1.1 peut être réécrit :

Lemme 2.7. Soit S une structure binaire (infinie) de cardinal n , elle admet une $(2; 1; 2, 1, 2; \Delta; \sigma, \Sigma)$ -décomposition arborescente questionnable de degré non borné qui est 1-serrée, ϵ -serrée, ϵ -courte, ϵ -moyenne et ϵ -large. $\Delta = \frac{n \times (n-1)}{2}$ dans le cas fini et $\Delta = n$ dans le cas infini. $\sigma = n - 1$ et $\Sigma = n \times (n - 1)$ dans le cas fini, et $\sigma = n$ et $\Sigma = n$ dans le cas infini.

On pourrait encore complexifier davantage les variantes de décompositions arborescentes questionnables pour avoir ou non un type d'adjacence par défaut. Les décompositions modulaires et les décompositions arborescentes questionnables ne font normalement aucune différence entre les différents types d'adjacences dont la non-adjacence dans le cas des graphes. Mais on pourrait briser cette symétrie pour dire qu'une paire de sommets dont aucun chemin montant n'a de question ne peut avoir que le type d'adjacence par défaut. Ce choix supplémentaire ne prend son sens que si l'on autorise des chemins montants sans question. En effet, pour les types "1", les variantes avec et sans type d'adjacence par défaut sont équivalentes; car il suffit d'ajouter des applications de largeur 2, ou plus si disponible, à la fin de la suite d'applications de la racine de la décomposition pour fixer toutes les adjacences manquantes avec le type d'adjacence par défaut. Cet ajout d'applications augmente la longueur d'application, la profondeur d'application et la profondeur combinée par un logarithme du nombre de sommets n dans le cas fini, où par au plus le premier ordinal de cardinalité n dans le cas infini. (Si n est au plus le cardinal de l'ensemble des parties d'un ensemble de cardinal n' , on peut prendre le premier ordinal de cardinalité n' .) Ce que l'on peut considérer comme négligeable et qui justifie que les décompositions arborescentes questionnables avec un type d'adjacence par défaut ne sont vraiment utiles qu'aux types " ϵ " et " p ". De plus, ce n'est intéressant que pour certaines classes de structures binaires où les adjacences qui ne sont pas du type par défaut sont peu denses; et dans cet article où nous

considérons des structures binaires arbitraires la plupart du temps, on peut toujours supposer que tous les types d'adjacences utilisés sont différents de celui par défaut voire différents entre eux. Nous laissons au lecteur le soin de relire tous les lemmes, corollaires et théorèmes de cet article pour voir que les résultats restent valides pour les décompositions avec un type d'adjacence par défaut.

3 Comparaisons

Nous obtenons toutes les comparaisons pour les 8 types principaux : 1-serrée, 1-courte, 1-moyenne, 1-large, ϵ -serrée, ϵ -courte, ϵ -moyenne et ϵ -large. Nous donnons quelques pistes (lemmes et contre-exemples) pour les autres cas.

Lemme 3.1. *Si une décomposition arborescente questionnable est courte, alors elle est serrée. Si une décomposition arborescente questionnable est moyenne, alors elle est courte. Si une décomposition arborescente questionnable est large, alors elle est moyenne.*

Lemme 3.2. *Si une décomposition arborescente questionnable est 1-serrée, resp. 1-courte, resp. 1-moyenne, resp. 1-large, alors elle est ϵ -serrée, resp. ϵ -courte, resp. ϵ -moyenne, resp. ϵ -large.*

Dans le cas fini, si $0 < p_1 < p_2 \leq 1$ et si une décomposition arborescente questionnable est p_2 -serrée, resp. p_2 -courte, resp. p_2 -moyenne, resp. p_2 -large, alors elle est ϵ -serrée et p_1 -serrée, resp. ϵ -courte et p_1 -courte, resp. ϵ -moyenne et p_1 -moyenne, resp. ϵ -large et p_1 -large.

Lemme 3.3. *Si une décomposition arborescente questionnable est 1-courte, alors elle est 1-serrée. Si une décomposition arborescente questionnable est 1-moyenne, alors elle est 1-courte. Si une décomposition arborescente questionnable est 1-large, alors elle est 1-moyenne.*

Lemme 3.4. *Si une décomposition arborescente questionnable est ϵ -courte, alors elle est ϵ -serrée. Si une décomposition arborescente questionnable est ϵ -moyenne, alors elle est ϵ -courte. Si une décomposition arborescente questionnable est ϵ -large, alors elle est ϵ -moyenne.*

Preuve :

Pour toute paire de sommets, par le lemme 2.5, s'il existe un chemin montant court, resp. moyen, resp. large, à question valide, il est inclus dans un chemin feuille-racine. Donc ce chemin feuille-racine a forcément une question, et par le lemme 3.1 cette question est valide. Seules les questions invalides séparent les types ϵ -serrée, ϵ -courte, ϵ -moyenne et ϵ -large. Donc les inclusions données découlent d'une deuxième application du lemme 3.1. ■

Toutes les autres inclusions pour les 8 types principaux sont fausses, voici des contre-exemples.

La décomposition en exemple (Exemple 1.1) qui a motivé cet article est 1-serrée, ϵ -serrée, ϵ -courte, ϵ -moyenne et ϵ -large, mais pas 1-courte, ni 1-moyenne, ni 1-large.

Exemple 3.5. La décomposition suivante est de tous les types principaux sauf 1-large. Soit une structure binaire avec 2 sommets x, y , telle que x est adjacent à y . On fait une cerise avec deux feuilles pour x et y ; et on fixe l'adjacence entre x et y par une application sur la racine de la cerise. (Dans la suite, on simplifiera les explications en disant qu'on fait une cerise (x, y) -adjacente pour cette construction, indépendamment du fait que x et y soient adjacents ou non dans le graphe décomposé. Si l'application sur la racine de la cerise fixe une non-adjacence entre x et y , on dira qu'on fait une cerise (x, y) -non-adjacente. S'il n'y a pas d'application sur la racine de la cerise, on dira qu'on fait une cerise (x, y) -libre.) On duplique cette cerise à l'identique. On relie les racines des deux cerises à la vraie racine de la décomposition qui n'a pas d'application.

Exemple 3.6. La décomposition suivante est ϵ -serrée, ϵ -courte, ϵ -moyenne et ϵ -large, mais pas 1-serrée, ni 1-courte, ni 1-moyenne, ni 1-large. Soit une structure binaire avec 2 sommets x, y , telle que x est adjacent à y . On fait une cerise (x, y) -adjacente. On fait une deuxième cerise (x, y) -libre. On relie les racines des deux cerises à la vraie racine de la décomposition qui n'a pas d'application.

Exemple 3.7. La décomposition suivante est 1-serrée et ϵ -serrée, mais pas 1-courte, ni ϵ -courte, ni 1-moyenne, ni ϵ -moyenne, ni 1-large, ni ϵ -large. Soit une structure binaire avec 3 sommets x, y et z , telle que x est adjacent à z ; et sinon tout est non-adjacent. On fait une cerise (x, y) -non-adjacente. On relie la racine de cette cerise à la vraie racine de la décomposition qui a aussi un fils-feuille x répété, un fils-feuille y répété et un fils-feuille z . La suite d'applications de la vraie racine met x adjacent à y et z (mais c'est couvert par la cerise entre x et y pour les types 1-serrée et ϵ -serrée), puis met y (et x) non-adjacent à z .

Exemple 3.8. La décomposition suivante est 1-serrée ϵ -serrée, 1-courte et ϵ -courte, mais pas 1-moyenne, ni ϵ -moyenne, ni 1-large, ni ϵ -large. Soit une structure binaire avec 3 sommets x, y et z , telle que x est adjacent à z ; et sinon tout est non-adjacent. On fait une cerise (x, y) -non-adjacente. On relie la racine de cette cerise à la vraie racine de la décomposition qui a aussi un fils-feuille x répété et un fils-feuille z . La suite d'applications de la vraie racine met x adjacent à y et z (mais c'est couvert par la cerise entre x et y pour les types 1-serrée, ϵ -serrée, 1-court et ϵ -court), puis met y (et x) non-adjacent à z .

Exemple 3.9. La décomposition suivante est 1-serrée, ϵ -serrée, 1-courte, ϵ -courte, 1-moyenne et ϵ -moyenne, mais pas 1-large, ni ϵ -large. Soit une structure binaire avec 3 sommets x, y et z , telle que x est adjacent à z ; et sinon tout est non-adjacent. On fait une cerise (x, y) -non-adjacente. On duplique cette cerise et on relie les deux cerises. On relie l'union des deux cerises à la vraie racine de la décomposition qui a aussi un fils-feuille z . La suite d'applications de la vraie racine met x adjacent à y et z (mais c'est couvert par les cerises entre x et y pour les types 1-serrée, ϵ -serrée, 1-courte, ϵ -courte, 1-moyenne et ϵ -moyenne), puis met y (et x) non-adjacent à z .

Nous avons donné 6 contre-exemples pour les inclusions. Si vous prenez le temps de dessiner le diagramme de Hasse et de mettre les traits de séparation liés aux contre-exemples, vous verrez que les 4 derniers contre-exemples suffisent.

Voici un complément pour voir que toutes les combinaisons sont possibles. Les types ont deux échelles : une pour 1, une pour ϵ , avec 4 niveaux (serrée, courte, moyenne, large), un niveau dans l'échelle 1 impliquant au moins le même niveau dans l'échelle ϵ . Il y a donc 14 combinaisons de types selon ces échelles :

1. ϵ -serrée,
2. ϵ -courte,
3. ϵ -moyenne,
4. ϵ -large,
5. 1-serrée, ϵ -serrée,
6. 1-serrée, ϵ -courte,
7. 1-serrée, ϵ -moyenne,
8. 1-serrée, ϵ -large,
9. 1-courte, ϵ -courte,
10. 1-courte, ϵ -moyenne,
11. 1-courte, ϵ -large,
12. 1-moyenne, ϵ -moyenne,
13. 1-moyenne, ϵ -large,
14. 1-large, ϵ -large,

Il est possible d'obtenir toutes ses combinaisons permises par les lemmes. La combinaison 14 n'a pas besoin de contre-exemple, puisqu'elle ne sépare pas de types. La combinaison 4 correspond au contre-exemple 3.6 ci-dessus. La combinaison 5 correspond au contre-exemple 3.7 ci-dessus. La combinaison 8 correspond au (contre-)exemple 1.1 ci-dessus. La combinaison 9 correspond au contre-exemple 3.8 ci-dessus. La combinaison 12 correspond au contre-exemple 3.9 ci-dessus. La combinaison 13 correspond au contre-exemple 3.5 ci-dessus. Voici les contre-exemples pour les 7 autres combinaisons.

Soit une structure binaire avec 2 sommets x, y , telle que x est adjacent à y . Toutes les décompositions contre-exemples sont des combinaisons d'au plus deux branches : une branche " ϵ " et une branche "1".

On appelle branche " ϵ -serrée" une cerise (x, y) -adjacente, suivie d'un nœud qui a aussi deux fils-feuilles pour x et y et qui a une application qui fixe une non-adjacence entre x et y . On appelle branche " ϵ -courte" une cerise (x, y) -adjacente, suivie d'un nœud qui a aussi un fils-feuille pour x et qui a une application qui fixe une non-adjacence entre x et y . On appelle branche " ϵ -moyenne" deux cerises (x, y) -adjacentes, suivies d'un nœud qui les relie et qui a une application qui fixe une non-adjacence entre x et y . On appelle branche " ϵ -large" une cerise (x, y) -adjacente.

On appelle branche "1-rien" une cerise (x, y) -libre. On appelle branche "1-serrée" une cerise (x, y) -adjacente, suivie d'un nœud qui a aussi deux fils-feuilles pour x et y et qui n'a pas d'application. On appelle branche "1-courte" une cerise (x, y) -adjacente, suivie d'un nœud qui a aussi un fils-feuille pour x et qui n'a pas d'application. Une simple cerise (x, y) -adjacente seule peut servir de branche "1-moyenne" et de branche "1-large", en plus de branche " ϵ -large".

Derrière ces deux branches, chaque décomposition a juste une racine sans application.

Pour la combinaison 1, on prend une branche " ϵ -serrée" et une branche "1-rien". Pour la combinaison 2, on prend une branche " ϵ -courte" et une branche "1-rien". Pour

la combinaison 3, on prend une branche “ ϵ -moyenne” et une branche “1-rien”. Pour la combinaison 4, on prend une branche “ ϵ -large” et une branche “1-rien”. Pour la combinaison 5, on prend une branche “ ϵ -serrée” (et une branche “1-serrée”). Pour la combinaison 6, on prend une branche “ ϵ -courte” et une branche “1-serrée”. Pour la combinaison 7, on prend une branche “ ϵ -moyenne” et une branche “1-serrée”. Pour la combinaison 8, on prend (une branche “ ϵ -large” et) une branche “1-serrée”. Pour la combinaison 9, on prend une branche “ ϵ -courte” (et une branche “1-courte”). Pour la combinaison 10, on prend une branche “ ϵ -moyenne” et une branche “1-courte”. Pour la combinaison 11, on prend (une branche “ ϵ -large” et) une branche “1-courte”. Pour la combinaison 12, on prend une branche “ ϵ -moyenne” (et une branche “1-moyenne”). Pour la combinaison 13, on prend une branche “ ϵ -large” et une branche “1-moyenne”. Pour la combinaison 14, on prend juste une cerise (x, y) -adjacente.

1-serré	ϵ -serré
1-court	ϵ -court
1-moyen	ϵ -moyen
1-large	ϵ -large

FIGURE 5 – Inclusion des 8 types principaux

Le lemme 3.3 n’a pas d’équivalent dans le cas fini et avec les proportions intermédiaires de questions valides.

En particulier, p -large ou p -moyenne n’implique pas p -courte ou p -serrée. Il suffit de considérer par exemple une décomposition D d’une structure binaire avec 2 sommets x et y ; D a deux branches : une profonde et une “large”; sur la racine de la branche profonde il y a une question valide. La branche profonde est un peigne qui commence par une cerise pour x et y , puis rajoute r feuilles avec x et rajoute r nœuds internes. La “branche” “large” contient s cerises pour x et y . Le dernier nœud interne de la branche profonde et toutes les cerises de la “branche” “large” sont reliées à la racine de D . D est $\frac{1}{s+1}$ -serrée, $\frac{1}{s+1}$ -courte, $\frac{r+1}{r+s+1}$ -moyenne et $\frac{r+1}{r+s+2}$ -large.

Pour montrer que p -courte n’implique pas p -serrée, il suffit d’ajouter r feuilles avec y sous chacun des r nœuds internes de l’exemple précédent. D devient alors $\frac{1}{s+1}$ -

serrée, $\frac{r+1}{r+s+1}$ -courte, $\frac{r+1}{r+s+1}$ -moyenne et $\frac{r+1}{r+s+2}$ -large.

Pour p -large n'implique pas p -moyenne, l'exemple est à peine plus compliqué. Il suffit de considérer par exemple une décomposition D d'une structure binaire avec 2 sommets x et y ; D est constituée d'un arbre binaire équilibré de profondeur l plus un dernier niveau fait de cerises pour x et y ; la racine de cet arbre contient une question valide; cet arbre est ensuite suivi vers la racine de D d'un peigne qui rajoute s feuilles avec x et rajoute s nœuds internes. Le dernier nœud interne ajouté est la racine de D . D est $\frac{2^l}{2^l+s}$ -moyenne et $\frac{2^{l+1}-1}{2^{l+1}-1+s}$ -large. Donc pour $s = 2^{l+1}$, on obtient environ $\frac{1}{3}$ -moyenne et $\frac{1}{2}$ -large. Et pour $s = 2^{l+h}$, on obtient $\frac{1}{2^{h+1}}$ -moyenne et $\frac{1-\frac{1}{2^{l+1}}}{2^{h-1}+1-\frac{1}{2^{l+1}}}$ -large. Donc le coefficient pour passer de large à moyen est $\frac{1}{2^{h+1}} \times \frac{2^{h-1}+1-\frac{1}{2^{l+1}}}{1-\frac{1}{2^{l+1}}} = \frac{2^{h-1}+1-\frac{1}{2^{l+1}}}{2^{h+1}} \times \frac{1}{1-\frac{1}{2^{l+1}}}$. Pour tout $l \geq 0$, $\frac{2^{h-1}+1-\frac{1}{2^{l+1}}}{2^{h+1}}$ tend vers $\frac{1}{2}$ quand on augmente h ; $\frac{1}{1-\frac{1}{2^{l+1}}}$ tend vers 1 quand on augmente l ; donc on peut faire tendre le tout vers $\frac{1}{2}$ par valeurs supérieures.

Ce dernier contre-exemple peut être décortiqué pour montrer que p -large implique $\frac{p}{2}$ -moyenne.

Lemme 3.10. *Dans le cas fini, si $0 < p \leq 1$ et si une décomposition arborescente questionnable est p -large, alors elle est $\frac{p}{2}$ -moyenne, et même $\frac{p}{2-p}$ -moyenne.*

Preuve :

Nous allons montrer que le contre-exemple ci-dessus est optimal. Remarquons tout d'abord qu'un contre-exemple sur une structure binaire avec plus de deux sommets peut être ramené à un contre-exemple avec seulement deux sommets, puisque le ratio minimum doit forcément être atteint pour une paire de sommets donnée; donc on peut élaguer la décomposition pour ne garder que l'union des arbres des deux sommets. Appelons les x et y . Comme il ne sert à rien d'avoir une application qui fixe un mauvais type d'adjacence entre x et y , on peut supposer que pour tout nœud, on a soit pas d'application, soit une unique application qui fixe le bon type d'adjacence pour tous les chemins issus de points de jonction plus bas dans l'arbre. Soient cmv le nombre de chemins montants moyens avec question valide, cms le nombre de chemins montants moyens sans question, clv le nombre de chemins montants larges avec question valide et cls le nombre de chemins montants larges sans question. Le contre-exemple est $\frac{cmv}{cmv+cms}$ -moyen et $\frac{clv}{clv+cls}$ -large. Le but du contre-exemple est de minimiser $\frac{cmv \times (clv+cls)}{(cmv+cms) \times clv}$. Comme un point de jonction moyen est aussi un point de jonction large, les chemins montants moyens sans question ne peuvent pas être plus nombreux que les chemins montants larges sans question : $cms \leq cls$. Donc plus cms se rapproche de cls , plus le ratio diminue. Cela montre que le paramètre s de notre contre-exemple est optimal, puisqu'il atteint l'égalité. On peut donc simplifier le ratio par $\frac{cmv \times (clv+cms)}{(cmv+cms) \times clv} = \frac{cmv \times clv + cms \times clv}{cmv \times clv + cms \times clv} = \frac{cmv \times clv + cms \times cmv}{cmv \times clv + cms \times clv}$. De même, $cmv \leq clv$, mais cette fois on veut obtenir une valeur de clv la plus grande possible par rapport à cmv pour faire baisser le ratio. Regardons maintenant la structure des sous-arbres avec question valide. Par minimalité du contre-exemple, en dehors de ses feuilles, tous ses

nœuds sont dans CT. Donc tous les nœuds internes sont points de jonction larges. Et si un nœud qui n'a que des feuilles comme fils est de degré supérieur à 2, on voit tout de suite que l'on peut supprimer au moins un fils. Donc si les feuilles sont le niveau 0, la condition d'être dans CT et d'être de degré 2 est vraie au niveau 1. Par induction sur les niveaux, si un nœud plus haut dans l'arbre a plus de deux fils, on peut les séparer pour faire une cerise dont la racine est un point de jonction large mais pas moyen et au plus une feuille de la cerise est point de jonction moyen (si le nœud séparé l'était), la deuxième feuille étant toujours point de jonction large. Donc cela augmente clv d'un, mais pas cmv . C'est aussi le cas, si un seul des deux fils est une feuille et qu'on le remplace par une cerise x, y . Donc, un contre-exemple optimal n'a pour "branches valides" que des arbres binaires terminés par des cerises x, y dont les seuls nœuds qui sont points de jonction moyen sont ceux de niveau 1. S'il y a plusieurs branches de ce type, en déplacer une pour la "greffer" sur une autre à la place d'une cerise fait disparaître un point de jonction moyen, éventuellement compensé par un autre créé après avoir élagué le point d'attache d'origine de la branche. Donc notre contre-exemple avec un arbre binaire valide suivi d'un peigne non-valide est optimal. Et il suffit de constater que l'on n'atteint jamais le ratio $\frac{cmv}{clv} > \frac{1}{2}$, mais qu'on s'en approche aussi prêt qu'on veut avec des arbres binaires équilibrés. Pour obtenir la borne $\frac{p}{2-p}$, voici la preuve : $p = \frac{clv}{clv+cls} \Leftrightarrow \frac{p}{clv} = \frac{1}{clv+cls} \Leftrightarrow \frac{clv}{p} = clv + cls \Leftrightarrow cls = \frac{clv}{p} - clv = \frac{clv-p \times clv}{p} = clv \times \frac{1-p}{p}$; $\frac{cmv}{cmv+cms} \geq \frac{cmv}{cmv+cls} \geq \frac{\frac{clv}{2}}{\frac{clv}{2}+cls} = \frac{clv}{clv+2cls} = \frac{clv}{clv+2 \times (clv \times \frac{1-p}{p})} = \frac{1}{1+2 \times \frac{1-p}{p}} = \frac{p}{p+2 \times (1-p)} = \frac{p}{2-p}$. ■

4 Résultats sur le degré

Lemme 4.1. *Si une décomposition arborescente questionnable est bijective, elle est de tous les types (les 8 types principaux et les autres types pour le cas fini).*

Preuve :

$CT(A_x, A_y)$ est un chemin. Il n'y a qu'une suite d'applications et elle a forcément une question valide. ■

Lemme 4.2. *Soit S une structure binaire finie.*

Soit D une $(K; \Lambda; \alpha, \beta, \gamma; \Delta; \sigma, \Sigma)$ -décomposition arborescente questionnable 1-courte, resp. ϵ -courte, resp. 1-moyenne, resp. ϵ -moyenne, resp. 1-large, resp. ϵ -large, de S avec $\Delta > 2$. Si on remplace chaque nœud de degré supérieur à 2 par un sous-arbre binaire dont la racine porte la suite d'applications du nœud, on obtient une $(K; \Lambda; \alpha', \beta, \gamma'; 2; \sigma, \Sigma)$ -décomposition arborescente questionnable 1-courte, resp. ϵ -courte, resp. 1-moyenne, resp. ϵ -moyenne, resp. 1-large, resp. ϵ -large, de S .

Preuve :

On peut séparer chaque nœud de degré supérieur à 2 en une cerise. On ne met pas d'application sur les deux feuilles de la cerise. Les questions ne seront donc pas sur ces feuilles.

Tout le raisonnement qui suit marche pour toute paire de sommets $\{x, y\}$.

On ne crée pas de question, mais on crée/déplace des points de jonction vers les feuilles seulement si le nœud séparé était un point de jonction. En effet, si un point de jonction court apparaît sur une feuille de la cerise, c'est qu'au moins un de ses fils est dans A_x mais pas dans A_y , et qu'un autre de ses fils est dans A_y mais pas dans A_x ; comme ces fils étaient des fils de la racine de la cerise, elle était bien un point de jonction court. De même, si un point de jonction moyen apparaît sur une feuille de la cerise, c'est qu'au moins un de ses fils est dans A_x mais pas dans A_y (ou dans A_y mais pas dans A_x); comme ce fils était un fils de la racine de la cerise, elle était bien un point de jonction moyen. Enfin, si un point de jonction large apparaît sur une feuille de la cerise, c'est qu'au moins deux de ses fils sont dans l'union de A_x et A_y ; comme ces fils étaient des fils de la racine de la cerise, elle était bien un point de jonction large.

Donc les nouveaux chemins montants courts, resp. moyens, resp. larges, ont une question si et seulement s'il y en avait une depuis le point de jonction court, resp. moyen, resp. large, d'origine. Donc la condition d'avoir toujours une question sur chaque chemin montant court, resp. moyen, resp. large, et qu'elle soit valide reste respectée pour 1-courte, resp. 1-moyenne, resp. 1-large. Et la condition d'avoir une question sur au moins un chemin montant court, resp. moyen, resp. large, et qu'elle soit valide reste respectée pour ϵ -courte, resp. ϵ -moyenne, resp. ϵ -large. ■

Théorème 4.3. *Soit S une structure binaire finie.*

Une $(K; \Lambda; \alpha, \beta, \gamma; \Delta; \sigma, \Sigma)$ -décomposition arborescente questionnable 1-courte, resp. ϵ -courte, resp. 1-moyenne, resp. ϵ -moyenne, resp. 1-large, resp. ϵ -large, peut être convertie en une $(K; \Lambda; \leq \alpha \times \lceil \lg(\Delta) \rceil, \beta, \leq \gamma \times \lceil \lg(\Delta) \rceil; 2; \sigma, \Sigma)$ -décomposition arborescente questionnable 1-courte, resp. ϵ -courte, resp. 1-moyenne, resp. ϵ -moyenne, resp. 1-large, resp. ϵ -large.

Preuve :

Il suffit d'appliquer le lemme 4.2 avec des sous-arbres binaires équilibrés (On sépare chaque nœud de degré supérieur à 2 en une cerise de manière équilibrée.). ■

Si l'on regarde le nombre de feuilles Σ de la décomposition, la construction avec des sous-arbres binaires équilibrés n'est pas optimale quand les profondeurs des sous-arbres correspondant aux fils d'un nœud sont très différentes, notamment s'il y a un seul fils de grande profondeur et que les autres fils sont des feuilles. Car elle ne fournit qu'une borne multiplicative pour l'augmentation de profondeur. Voici un raisonnement pour le voir. Chaque nœud a été remplacé par un sous-arbre binaire équilibré, et la profondeur maximale est atteinte le long d'un des chemins feuille-racine. Soit $C = (u_0, u_1, \dots, u_{\alpha-})$, $\alpha^- \leq \alpha$ le chemin avant transformation, et $C' = (u_0, u'_1, \dots, u'_{\alpha'})$

le chemin feuille-racine correspondant, parmi ceux de longueur maximale après transformation (La feuille u_0 n'a pas été modifiée.). La nouvelle profondeur est égale à $\sum_{i=1}^{\alpha^-} \lceil \lg(d(u_i)) \rceil = \sum_{i=1}^{\alpha^-} (1 + \lceil \lg(d(u_i)) \rceil - 1) < \alpha^- + \sum_{i=1}^{\alpha^-} \lg(d(u_i)) \leq \alpha + \lg(\prod_{i=1}^{\alpha^-} d(u_i))$. Si l'on cherche le pire cas, où la quantité $\prod_{i=1}^{\alpha^-} d(u_i)$ est maximisée, on voit que cela se produit pour un chemin où chaque nœud a environ le même nombre de fils-feuilles. $\alpha' < \alpha + \lg(\prod_{i=1}^{\alpha^-} \lceil \frac{\Sigma}{\alpha^-} \rceil) \leq \alpha + \lg(\prod_{i=1}^{\alpha^-} \lceil \frac{\Sigma}{\alpha} \rceil) < \alpha + \lg(\frac{\Sigma+\alpha}{\alpha}) = \alpha \times (1 + \lg(\frac{\Sigma+\alpha}{\alpha}))$.

Néanmoins, on peut montrer qu'une borne additive est possible :

Théorème 4.4. *Soit S une structure binaire finie.*

Une $(K; \Lambda; \alpha, \beta, \gamma; \Delta; \sigma, \Sigma)$ -décomposition arborescente questionnable 1-courte, resp. ϵ -courte, resp. 1-moyenne, resp. ϵ -moyenne, resp. 1-large, resp. ϵ -large, avec $\Delta > 2$ peut être convertie en une $(K; \Lambda; \leq \alpha + \lceil \lg(\Sigma - \alpha + 1) \rceil - 1, \beta, \leq \gamma + \lceil \lg(\Sigma - \alpha + 1) \rceil - 1; 2; \sigma, \Sigma)$ -décomposition arborescente questionnable 1-courte, resp. ϵ -courte, resp. 1-moyenne, resp. ϵ -moyenne, resp. 1-large, resp. ϵ -large.

Preuve :

Il suffit d'appliquer le lemme 4.2 avec des sous-arbres binaires qui minimisent l'augmentation globale de profondeur. Pour cela, on traite les nœuds de degré supérieur à 2 par ordre de niveau : d'abord les nœuds dont tous les fils sont des feuilles, etc. Quand un nœud u a plus de deux fils, il faut commencer par faire une cerise qui joint deux de ces fils dont les profondeurs de sous-arbre sont minimales. Puis on itère la construction. En effet, soit u_1 un fils de u (dont le sous-arbre est) de profondeur minimale, et soit u_2 un fils de u (dont le sous-arbre est) de profondeur minimale si on exclut u_1 . Supposons que la construction n'a pas été respectée, et qu'on a joint u_1 avec un fils (resp. une jointure de fils) u_3 de profondeur plus grande que u_2 et qu'on a joint u_2 avec un fils (resp. une jointure de fils) u_4 de profondeur plus grande que u_1 . Notons pr la fonction de profondeur. On a pour le moment $pr(u_1, u_3) = pr(u_3) + 1$ et $pr(u_2, u_4) = pr(u_4) + 1$. Si à la place, on joint u_1 et u_2 , et u_3 et u_4 , on obtient $pr(u_1, u_2) = pr(u_2) + 1$ et $pr(u_3, u_4) = \max(pr(u_3), pr(u_4)) + 1$; il suffit donc éventuellement d'échanger en plus les racines des deux cerises pour que $\max(pr(u_3), pr(u_4)) + 1$ se retrouve bien du plus profond côté entre $pr(u_3) + 1$ et $pr(u_4) + 1$. Il existe donc toujours parmi les sous-arbres binaires qui minimisent la profondeur globale, un qui est obtenu en prenant cette approche de joindre d'abord les fils de plus faibles profondeurs.

Afin de trouver le pire cas en termes d'augmentation de la profondeur structurale, il n'y a que deux paramètres qui ne doivent pas augmenter : α , la profondeur structurale de départ, et Σ , le nombre de feuilles. Nous dirons qu'un fils d'un nœud est un fils aîné si son sous-arbre est de profondeur maximum parmi les fils et que son nombre de feuilles dans son sous-arbre est maximum parmi les fils dont le sous-arbre est de profondeur maximum. Nous allons chercher un tel pire cas qui minimise la somme des degrés moins 2 des nœuds de niveau au moins 2 et qui maximise le nombre de feuilles dans les fils aînés sous chaque nœud de niveau au moins 2. Et nous allons prouver par induction sur les niveaux qu'il s'agit de

peignes dont tous les nœuds sont de degré 2, prolongés par une étoile/un éventail de plus haut degré. Appelons ce peigne plus un éventail, un grand éventail.

Pour les nœuds de niveau 0, ce sont des feuilles et le grand éventail est réduit à une feuille.

Pour les nœuds de niveau 1, tous leurs fils sont des feuilles, il n'y a rien de modifiable. Et le grand éventail est réduit à un éventail sans peigne par dessus.

Pour les nœuds de niveau supérieur, par hypothèse d'induction, on peut supposer que tous les sous-arbres de ses fils sont des grands éventails. Au moins un fils est une feuille, car on ne perd rien en profondeur si la première jointure parmi ses fils se fait avec une feuille (si un nœud fils de profondeur minimale n'est pas une feuille, on ne perd rien à prendre toutes ses feuilles sauf une pour les mettre dans l'éventail d'un autre fils). De même, au plus un fils est une feuille, car là encore si on avait deux fils-feuille, on ne perdrait rien à les remplacer par une cerise et ça ferait baisser la somme des degrés moins 2. Si l'un des fils est une feuille et qu'un autre est une cerise, on ne perd rien non-plus à les remplacer par un nœud avec 3 fils-feuilles. Donc, on a toujours exactement un fils-feuille et les autres fils ont au moins 3 feuilles dans leur sous-arbre. Au niveau j , on ne perd rien non plus à étirer un grand éventail sur un fils en prenant des feuilles dans son éventail, pour rallonger son peigne. Donc sans perte de généralité, soit le grand éventail est de profondeur $j - 1$, soit son éventail n'a plus que deux feuilles. De plus, sauf pour le fils aîné ("le" est justifié ci-après par un choix arbitraire en cas d'égalité qui ne fera que renforcer la "préférence" pour ce fils dans les transformations ultérieures), soit le grand éventail est de profondeur $j - 1$ et son éventail a $2^l + 1$ feuilles pour un certain l (car au plus $2^l - 1$ feuilles en plus dans l'éventail peuvent aller sans perte d'augmentation de profondeur vers l'éventail d'un fils aîné choisi), soit son éventail n'a plus que deux feuilles. Comme on a exactement un fils-feuille et si on a aussi un fils de profondeur moins que $j - 1$ avec deux feuilles dans son éventail, prenons un tel fils de profondeur minimale, on peut encore le joindre avec le fils-feuille pour faire diminuer le nombre de fils, donc la somme des degrés moins 2. Donc cela ne s'arrête que quand tous les fils sont de profondeur $j - 1$ sauf le fils-feuille. Sinon, la somme des degrés moins 2 des nœuds de niveau au moins 2 n'est pas minimale ou le nombre de feuilles du fils aîné n'est pas maximale. Considérons le plus petit nombre de feuilles dans un éventail $2^{l_m} + 1$ en dehors du fils-feuille (Notez que $2 = 2^0 + 1$ et que $l_m = 0$ est possible.). Si on a trois fils avec $2^{l_m} + 1$ feuilles dans leur éventail, la première jointure va en joindre un avec le fils-feuille et la deuxième jointure va joindre les deux autres. Mais une fusion des deux fils de la deuxième jointure aurait donné un seul fils avec $2^{l_m+1} + 2 + (j - 2)$ feuilles dans son éventail, donc au moins une feuille de plus à donner au fils aîné. Donc on a au plus deux fils avec $2^{l_m} + 1$ feuilles dans leur éventail. S'il y en a deux, les deux premières jointures joignent un de ces deux fils avec le fils-feuille, puis joignent le résultat de la première jointure avec le deuxième fils. On aurait obtenu le même résultat en termes d'augmentation de profondeur, si on avait fusionné les deux fils pour passer à $2^{l_m+1} + 1$ feuilles dans l'éventail d'un nouveau fils (en donnant les feuilles en plus au fils aîné), et qu'on joint le nouveau fils au fils-feuille. On peut donc supposer qu'il n'y a qu'un fils avec $2^{l_m} + 1$ feuilles dans l'éventail. Mais donc

l'unique jointure entre un fils avec $2^{l_m} + 1$ feuilles et le fils-feuille n'apportera à un fils avec au moins $2^{l_m+1} + 1$ feuilles pas plus de gain de profondeur que juste le fils-feuille tout seul. Donc en itérant, on peut mettre toutes les feuilles dans le fils aîné sauf le fils-feuille.

Au final, il suffit de voir que si la totalité d'un des pire cas est un grand éventail de profondeur α , alors l'augmentation maximum de profondeur avec cet algorithme est au plus $\lceil \lg(\Sigma - \alpha + 1) \rceil - 1$. ■

Corollaire 4.5. *Soit S une structure binaire finie de cardinal n , elle admet une $(2; 1; \lceil \lg(n) + \lg(n-1) \rceil, 1, \lceil \lg(n) + \lg(n-1) \rceil; 2; n-1, n \times (n-1))$ -décomposition arborescente questionnable ϵ -serrée, ϵ -courte, ϵ -moyenne et ϵ -large.*

Preuve :

$$\lceil \lg(\frac{n \times (n-1)}{2}) \rceil + 1 = \lceil \lg(n) + \lg(n-1) - \lg(2) \rceil + 1 = \lceil \lg(n) + \lg(n-1) \rceil. \quad \blacksquare$$

Corollaire 4.6. *Modulo un ajout logarithmique sur la profondeur, une décomposition arborescente questionnable bijective d'une structure binaire finie peut être convertie en une décomposition arborescente questionnable bijective de degré 2/binaire.*

Donc peu importe le degré quand on cherche des décompositions arborescentes questionnables bijectives équilibrées de manière logarithmique.

Lemme 4.7. *Dans un arbre binaire, un point de jonction court est une feuille.*

Corollaire 4.8. *Si une décomposition arborescente questionnable de degré 2 est serrée, resp. 1-serrée, resp. ϵ -serrée, resp. p -serrée, alors elle est courte, resp. 1-courte, resp. ϵ -courte, resp. p -courte. Si une décomposition arborescente questionnable de degré 2 est p -courte, alors elle est p -serrée.*

5 Élagage

5.1 But et définitions

Dans cette section, nous voulons supprimer des feuilles et des nœuds pour débarrasser une décomposition arborescente questionnable de redondances inutiles.

Définition 5.1 (Élagage (léger/lourd)). *Un élagage d'une décomposition arborescente questionnable consiste à supprimer certaines de ses feuilles ; puis par induction sur les niveaux,*

- *on supprime tout nœud interne qui n'a plus de fils,*
- *et, dans le cas d'un élagage lourd, on fusionne si possible tout nœud qui n'a plus qu'un fils avec son fils, en concaténant leurs suites-d'applications, ce qui n'est pas toujours possible dans le cas infini car un nœud peut avoir un fils sans nœud maximal ;*

enfin, on restreint les applications aux nouvelles valeurs d'étiquetage des feuilles des nœuds internes, et si cela crée des applications qui n'ont qu'un sommet image, on supprime ces applications. Si des nœuds de degré 1 se retrouvent avec une suite d'applications vide, on les supprime aussi sauf si c'est la racine.

Clairement, aucun des 8 paramètres $(K; \Lambda; \alpha, \beta, \gamma; \Delta; \sigma, \Sigma)$ n'augmente avec un élagage léger. Et seule la longueur d'application Λ peut augmenter avec un élagage lourd. Normalement, on ne devrait considérer que des élagages lourds et des décompositions normalisées où il n'y a aucun nœud de degré 1 superflu. Car avec des nœuds de degré 1 non-nécessaires, on peut toujours faire baisser Λ à 1 et rendre la profondeur structurelle et la profondeur combinée égales, ce qui est un peu stupide. Mais, pour le moment, il nous manque un résultat montrant que la profondeur d'application augmente peu si toutes les adjacences sont fixées dès que les sommets sont présents dans le sous-arbre. (Si c'était le cas, on pourrait supprimer un nœud de degré 1 qui n'est pas sur un ordinal limite, en supprimant aussi toute sa suite d'applications au lieu d'avoir à la concaténer avec le nœud fils.) En fait, deux choses s'opposent à ce résultat :

- pour les décompositions qui ne sont pas de type “1”, il est légitime pour exploiter leur puissance de ne pas fixer tout le temps toutes les adjacences ;
- sinon, il y a aussi l'exemple d'un peigne sans adjacence/sans applications, suivi d'une suite d'applications de longueur logarithmique sur la racine pour fixer toutes les adjacences dans le cas d'une clique par exemple ; on voit bien que dans ce cas, il est possible de rééquilibrer l'arbre avant de fixer les adjacences pour corriger ce problème d'augmentation exponentielle de la profondeur d'application, mais généraliser ce rééquilibrage pour obtenir une vraie borne correcte ne semble pas simple.

La fonction ef a été définie pour tous les nœuds d'une décomposition arborescente questionnable. On peut aussi l'étendre aux sous-arbres de la décomposition en prenant l'union de ses valeurs sur les nœuds du sous-arbre. Il est alors facile de voir que la valeur de ef pour le sous-arbre d'un fils (définition valable dans les cas finis et infinis) est égale à la valeur de ef sur un nœud fils (qui existera toujours dans le cas fini). Quand les nœuds ou fils (sous-arbres) sont appelés u et u_i , on notera $F = ef(u)$ et $F_i = ef(u_i)$. On notera aussi :

- $F^2 = \{\{x, y\}; x, y \in F\}$,
- $F_i^2 = \{\{x, y\}; x, y \in F_i\}$,
- $F^2SV = \{\{x, y\}; x, y \in F \text{ et ou bien } x = y, \text{ ou bien ils ont au moins une question valide sur leurs chemins feuille-racine partant du sous-arbre de } u\}$,
- $F_i^2SV = \{\{x, y\}; x, y \in F_i \text{ et ou bien } x = y, \text{ ou bien ils ont au moins une question valide sur leurs chemins feuille-racine partant du sous-arbre de } u_i\}$,
- $F^2V = \{\{x, y\}; x, y \in F, x \neq y \text{ et ils ont au moins une question valide sur leurs chemins feuille-racine partant du sous-arbre de } u\}$,
- $F_i^2V = \{\{x, y\}; x, y \in F_i, x \neq y \text{ et ils ont au moins une question valide sur leurs chemins feuille-racine partant du sous-arbre de } u_i\}$.

Définition 5.2 (Racine de l'élagage). *Le nœud unique du lemme suivant est appelé la racine de l'élagage.*

Lemme 5.3. *Pour tout élagage, il existe un nœud u tel que l'élagage n'a lieu que sous*

u, et tel que F n'est pas modifié. Si l'on prend un tel nœud minimal dans l'arbre/dans l'ordre partiel, il est unique.

Preuve :

Quand on élague tout en gardant au moins une feuille par sommet, si u est la racine de la décomposition, alors F n'est pas modifié. Si l'élagage a lieu dans plusieurs fils sous la racine, la racine est clairement la racine de l'élagage. Sinon, il y a un unique fils u_1 qui contient l'élagage, on peut donc descendre dans ce fils, si F_1 n'est pas modifié. Comme on considère des ordres partiels bien fondés, on aboutit toujours à une racine unique de l'élagage. ■

5.2 Élagage et points de jonction

Lemme 5.4. *Aucun élagage ne crée de point de jonction large.*

Preuve :

L'arbre union qui entoure l'arbre commun est élagué, donc il ne peut y avoir deux branches dans l'arbre union, après élagage, qui si elles existaient déjà avant. ■

Lemme 5.5. *Les seuls points de jonction qui peuvent être modifiés par un élagage sont situés sous la racine d'élagage, cette racine étant incluse. Cette racine peut devenir un point de jonction serré, mais ne peut pas devenir un point de jonction court, moyen ou large, si elle ne l'était pas déjà avant.*

Lemme 5.6. *Aucun élagage qui supprime totalement un fils de la racine de l'élagage ne crée de point de jonction court ou moyen (ou large).*

5.3 Élagage quand un fils couvre un autre fils

Lemme 5.7. *Si un nœud u d'une décomposition arborescente questionnable de n'importe quel type a deux fils u_1 et u_2 , tels que $F_1 = F_2 = \{x\}$, alors on peut supprimer le fils-feuille u_1 . (Si quelqu'un de vraiment vicieux vous a fourni la décomposition, il se peut que u_1 soit un sous-arbre non-réduit à un fils-feuille, mais vous avez quand même le droit de le supprimer;.)*

Preuve :

Aucun point de jonction n'est modifié, même dans le cas serré (cf. lemme 5.5 pour les autres cas); on a les mêmes chemins montants avec les mêmes questions valides. ■

Lemme 5.8. *Si un nœud u d'une décomposition arborescente questionnable 1-serrée, 1-courte, 1-moyenne ou 1-large a deux fils u_1 et u_2 , tels que $F_1 \subseteq F_2$, alors on peut supprimer tout le sous-arbre enraciné en u_1 .*

Preuve :

En effet, on ne peut pas créer de point de jonction qui pourrait créer un chemin montant sans question valide ou avec une question invalide, et on garde au moins un chemin montant avec question valide pour toute paire de sommets. ■

De même :

Lemme 5.9. *Si un nœud u d'une décomposition arborescente questionnable 1-serrée, 1-courte, 1-moyenne, 1-large, ϵ -serrée, ϵ -courte, ϵ -moyenne, ϵ -large ou p -serrée a deux fils u_1 et u_2 , tels que $F_1 = \{x\} \subseteq F_2$, alors on peut supprimer le fils-feuille/tout le sous-arbre enraciné en u_1 .*

Preuve :

En effet, pour toute paire, aucun point de jonction en dehors de u n'est modifié. Pour les types serrés de décompositions, u est toujours point de jonction ou non pour les mêmes paires.

Pour les autres types, il se peut que u ne soit plus point de jonction, alors qu'il l'était avant. S'il n'y avait pas de question valide sur le chemin montant partant de u , cela ne change rien. Mais de toute manière, pour toute paire qui perd u comme point de jonction, il se trouve un autre point de jonction sous au moins un autre des fils de u , donc ce point de jonction a forcément une question valide sur son chemin montant, soit au début, soit dans la partie commune avec le chemin montant partant de u . ■

Lemme 5.10. *Si un nœud u d'une décomposition arborescente questionnable ϵ -serrée, ϵ -courte, ϵ -moyenne ou ϵ -large a deux fils u_1 et u_2 , tels que $F_1^2 SV \subseteq F_2^2 SV$, alors on peut supprimer tout le sous-arbre enraciné en u_1 .*

Car là aussi, on ne peut pas créer de point de jonction qui pourrait créer un chemin montant avec une question invalide, et on garde au moins un chemin montant avec question valide pour toute paire de sommets.

Du lemme 5.8, on obtient aussi :

Lemme 5.11. *Si un nœud u d'une décomposition arborescente questionnable 1-serrée, 1-courte, 1-moyenne ou 1-large a les fils $(u_i)_{i \in \delta}$ tels que $\exists j, F_j \supseteq \bigcup_{i \in \delta, i \neq j} F_i$, alors on peut supprimer tous les sous-arbres des $u_i, i \in \delta, i \neq j$.*

Du lemme 5.10, on obtient aussi :

Lemme 5.12. *Si un nœud u d'une décomposition arborescente questionnable ϵ -serrée, ϵ -courte, ϵ -moyenne ou ϵ -large a les fils $(u_i)_{i \in \delta}$ tels que $\exists j, F_j^2 SV \supseteq \bigcup_{i \in \delta, i \neq j} F_i^2 SV$, alors on peut supprimer tous les sous-arbres des $u_i, i \in \delta, i \neq j$.*

Ces deux derniers lemmes seront utiles pour borner la profondeur.

5.4 Élagage partiel sous un fils

Lemme 5.13. *Si une décomposition arborescente questionnable 1-large a deux feuilles correspondant au même sommet, on peut en supprimer/élaguer une.*

Preuve :

Un élagage de feuille ne crée pas de point de jonction large (mais un point de jonction large peut devenir un point de jonction moyen, ce qui exclut ce résultat pour 1-moyen; et un point de jonction moyen peut devenir un point de jonction court, ce qui exclut ce résultat pour 1-court). Et comme la feuille est redondante, il reste au moins un point de jonction large pour toute paire de sommets. Comme avec le type 1-large, tout point de jonction engendre une question valide, la propriété d'avoir encore une question valide reste vraie. ■

Corollaire 5.14. *La largeur arborescente questionnable non-bijective 1-large est égale à la largeur arborescente questionnable bijective.*

Lemme 5.15. *Soit D une décomposition arborescente questionnable 1-serrée, resp. 1-courte, resp. 1-moyenne, resp. 1-large. Soit un nœud u de D avec ses fils $(u_i)_{i \in \delta}$. Soit u_j un de ses fils. Soit $X \subseteq \bigcup_{i \in \delta, i \neq j} F_i$. Quand on élague toutes les feuilles correspondant à l'ensemble de sommets X dans le sous-arbre du fils u_j , on obtient une décomposition arborescente questionnable 1-serrée, resp. 1-courte, resp. 1-moyenne, resp. 1-large, si pour toute paire de sommets $\{x, y\}$ telle que $\{x, y\} \cap X \neq \emptyset$, si le nœud u est un point de jonction serré, resp. court, resp. moyen, resp. large, après élagage, alors il était point de jonction serré, resp. court, resp. moyen, resp. large, avant élagage.*

Preuve :

Soit une paire de sommets $\{x, y\}$. Leurs points de jonction dans les fils autres que u_1 de u n'ont pas été modifiés, ni leurs questions qui sont donc valides. De même pour les points de jonction en dehors de $SI(u)$ qui ne sont pas modifiés ainsi que leurs questions, car $X \subseteq \bigcup_{i \in \delta, i \neq j} F_i$. Les seuls points de jonction qui sont peut-être modifiés sont ceux dans le sous-arbre de u_1 et u lui-même. On peut donc supposer que $\{x, y\} \subseteq F$.

Si $\{x, y\} \cap X = \emptyset$, alors aucun point de jonction entre eux n'a été créé, et aucun point de jonction n'a disparu si l'on considère que les regroupements de nœuds de la définition d'élagage sont moralement le "même" nœud.

Sinon, tous les points de jonction entre $\{x, y\}$ dans le sous-arbre de u_1 ont été supprimés. Il n'y a donc pas de création de point de jonction, sauf si u en devient un, ce qui pourrait être un problème s'il se retrouve sans question valide dans le cas "1", ou avec une question invalide.

Enfin, comme $X \subseteq \bigcup_{i \in \delta, i \neq j} F_i$, pour toute paire de sommets $\{x, y\}$ telle que $\{x, y\} \cap X \neq \emptyset$: si $\exists k \in \delta \setminus \{j\}, \{x, y\} \subseteq F_k$, on a un point de jonction valide entre eux dans F_k , donc il faut juste éviter que u ne soit pas un point de jonction et qu'il le devienne; si $\nexists k \in \delta \setminus \{j\}, \{x, y\} \subseteq F_k$, alors, comme $\{x, y\} \subseteq F$, u est un point de jonction (serré, donc court, etc.) après élagage, donc là encore, il faut

juste éviter que u ne soit pas un point de jonction et qu'il le devienne, c'est-à-dire le cas où il n'était pas point de jonction. ■

Théorème 5.16. *La largeur arborescente questionnable non-bijective 1-moyenne est égale à la largeur arborescente questionnable bijective.*

Preuve :

Si une décomposition arborescente questionnable 1-moyenne a deux feuilles correspondant au même sommet, on a un nœud u dont 2 fils u_1, u_2 ont des étiquetages de feuilles qui s'intersectent $F_1 \cap F_2 \neq \emptyset$. Si on applique le lemme 5.15, avec $X = F_1 \cap F_2$ et $u_j = u_2$, il reste juste à démontrer que pour toute paire de sommets $\{x, y\}$ telle que $\{x, y\} \cap X \neq \emptyset$ si le nœud u est un point de jonction après, alors il était point de jonction avant. (Le cas large est trivial ici, puisqu'il est évident que si j'ai au moins deux fils dans CT après élagage, alors, *a fortiori*, j'ai bien aussi au moins deux fils dans CT avant élagage.) Si u est un point de jonction moyen après, alors sans perte de généralité un de ses fils a une feuille pour x mais pas pour y après, donc aussi avant pour x . Si ce fils avait des feuilles pour x et pour y avant, c'est donc qu'on est dans le cas où $x \notin X, y \in X$ et le fils en question c'est $u_j = u_2$, donc $\{x, y\} \subseteq F_2$. Mais donc $x \notin F_1, y \in X \subseteq F_1$ donc u était un point de jonction moyen avant. ■

Du lemme 5.15, on déduit aussi :

Lemme 5.17. *Soit D une décomposition arborescente questionnable ϵ -serrée, resp. ϵ -courte, resp. ϵ -moyenne, resp. ϵ -large. Soit un nœud u de D avec ses fils $(u_i)_{i \in \delta}$. Soit u_j un de ses fils. Soit $X \subseteq \bigcup_{i \in \delta, i \neq j} F_i$. Quand on élague toutes les feuilles correspondant à l'ensemble de sommets X dans le sous-arbre du fils u_j , on obtient une décomposition arborescente questionnable ϵ -serrée, resp. ϵ -courte, resp. ϵ -moyenne, resp. ϵ -large, si*

- *pour toute paire de sommets $\{x, y\}$ telle que $\{x, y\} \cap X \neq \emptyset$, si le nœud u est un point de jonction serré, resp. court, resp. moyen, resp. large, après élagage, alors il était point de jonction serré, resp. court, resp. moyen, resp. large, avant élagage,*
- *et $F_j^2 V \cap \{\{x, y\}; x \in X, y \in F\} \subseteq \bigcup_{i \in \delta, i \neq j} F_i^2 V$.*

5.5 Élagage quand des fils couvrent un autre fils

Lemme 5.18. *Si un nœud u d'une décomposition arborescente questionnable 1-courte, 1-moyenne ou 1-large a les fils $(u_i)_{i \in \delta}$ tels que $\exists j, F_j \subseteq \bigcup_{i \in \delta, i \neq j} F_i$, alors on peut supprimer tout le sous-arbre de u_j .*

Preuve :

Comme $F_j \subseteq \bigcup_{i \in \delta, i \neq j} F_i$, la suppression du sous-arbre de u_j ne crée pas de point de jonction plus haut dans l'arbre. Et u n'est pas point de jonction court, moyen ou large après élagage, s'il ne l'était pas déjà avant. Donc, on peut conclure par le lemme 5.15. ■

Corollaire 5.19. *Dans une décomposition arborescente questionnable 1-courte sans élagage possible, pour chaque fils, il existe un sommet que seul ce fils a dans les feuilles de son sous-arbre.*

Lemme 5.20. *Si un nœud u d'une décomposition arborescente questionnable 1-serrée a les fils $(u_i)_{i \in \delta}$ tels que $\exists j, F_j^2 \subseteq \bigcup_{i \in \delta, i \neq j} F_i^2$, alors on peut supprimer tout le sous-arbre de u_j .*

Preuve :

$F_j^2 \subseteq \bigcup_{i \in \delta, i \neq j} F_i^2$ implique en particulier que $F_j \subseteq \bigcup_{i \in \delta, i \neq j} F_i$. Comme $F_j \subseteq \bigcup_{i \in \delta, i \neq j} F_i$, la suppression du sous-arbre de u_j ne crée pas de point de jonction plus haut dans l'arbre. Comme $\{\{x, y\}; x, y \in F_j, x \neq y\} \subseteq \bigcup_{i \in \delta, i \neq j} \{\{x, y\}; x, y \in F_i, x \neq y\}$, pour toute paire $\{x, y\} \subseteq F_j^2$, $\exists i \in \delta, x, y \in F_i \Leftrightarrow \exists i \in (\delta \setminus \{j\}), x, y \in F_i$. Donc u est point de jonction serré après élagage si et seulement s'il l'est avant. D'où, on peut conclure par le lemme 5.15. ■

Corollaire 5.21. *Dans une décomposition arborescente questionnable 1-serrée sans élagage possible, pour chaque fils, il existe un sommet ou une paire de sommets que seul ce fils a dans les feuilles de son sous-arbre.*

Du lemme 5.4, on a :

Corollaire 5.22. *Dans une décomposition arborescente questionnable ϵ -large, on peut sélectionner au plus $\frac{n \times (n-1)}{2}$ nœuds internes, chacun de ces nœuds internes contenant au moins une question qui fixe une adjacence entre deux sommets, puis sélectionner au plus $n \times (n-1)$ feuilles dont les sommets utilisent les questions sélectionnées, et élaguer toutes les autres feuilles.*

Lemme 5.23. *Si un nœud u d'une décomposition arborescente questionnable ϵ -courte, ϵ -moyenne ou ϵ -large a les fils $(u_i)_{i \in \delta}$ tels que $\exists j, F_j^2 SV \subseteq \bigcup_{i \in \delta, i \neq j} F_i^2 SV$, alors on peut supprimer tout le sous-arbre de u_j .*

Corollaire 5.24. *Dans une décomposition arborescente questionnable ϵ -courte sans élagage possible, pour chaque fils, il existe soit un sommet que seul ce fils a dans les feuilles de son sous-arbre, soit une paire de sommets que seul ce fils a dans les feuilles de son sous-arbre avec une question valide.*

Lemme 5.25. *Si un nœud u d'une décomposition arborescente questionnable ϵ -serrée a les fils $(u_i)_{i \in \delta}$ tels que $\exists j, F_j^2 \subseteq \bigcup_{i \in \delta, i \neq j} F_i^2 \wedge F_j^2 V \subseteq \bigcup_{i \in \delta, i \neq j} F_i^2 V$, alors on peut supprimer tout le sous-arbre de u_j .*

Corollaire 5.26. *Dans une décomposition arborescente questionnable ϵ -serrée sans élagage possible, pour chaque fils, il existe soit un sommet que seul ce fils a dans les feuilles de son sous-arbre, soit une paire de sommets que seul ce fils a dans les feuilles de son sous-arbre, soit une paire de sommets que seul ce fils a dans les feuilles de son sous-arbre avec une question valide.*

6 Bornes sur les paramètres

6.1 Largeur

La largeur K des décompositions arborescentes questionnables est facile à encadrer. Pour toute structure binaire avec au moins deux éléments, il faut que la largeur soit au moins 2. Et il ne sert à rien d’avoir une largeur supérieure à n puisque une unique application vers une structure binaire de cardinal n suffit à tout décomposer.

Lemme 6.1. *Dans une décomposition arborescente questionnable sans redondance inutile, $2 \leq K \leq n$.*

6.2 Longueur d’application

La longueur d’application Λ des décompositions arborescentes questionnables est plus compliquée à encadrer. Pour toute structure binaire avec au moins deux éléments, il faut que la longueur d’application soit au moins 1. C’est aussi le cas pour des structures binaires plus grosses, comme des stables, des cliques, ou des cographes sur un arbre binaire de décomposition. Si la largeur est K et que $n \leq K$, une longueur d’application de 1 suffit pour toute structure binaire, et donc *a fortiori* si certaines de ses adjacences sont alf (voir Lyaudet (2020)). Chaque application de largeur K coupe proprement la structure binaire en au moins K parties séparées par des adjacences alf.

Pour $K = 2$, on voit tout de suite que chaque application augmente le nombre de parties séparées par des adjacences alf d’au moins un. Donc $n - 1$ applications au maximum suffisent pour n’avoir plus que des singletons : $\Lambda_{\max}(n, 2) \leq n - 1$. Et bien sûr, $\Lambda_{\max}(n) \leq \Lambda_{\max}(n, 2)$.

Comme exemple de construction qui donne $\Lambda_{\max}(n, 2)$, on peut prendre une structure binaire où un sommet a le même type d’adjacence avec tous les autres sommets, mais aucune arête non-incidente à ce sommet n’utilise ce type d’adjacence ; puis parmi les autres sommets, un sommet a le même type d’adjacence avec tous les autres sommets restants, mais aucune arête non-incidente à ce sommet n’utilise ce type d’adjacence, etc.

Pour $K = 3$, on peut tout de même se retrouver à devoir utiliser une application de largeur 2 de temps en temps. Comme la largeur 3 suffit, soit on obtient des singletons après chaque découpe par application, soit on peut découper récursivement par une application de largeur au plus 3. Supposons qu’une partie soit coupable en deux, et qu’une des 2 sous-parties soit aussi coupable en deux, alors on peut faire directement cette découpe en 3 parties avec une seule application de largeur 3 ; on a un gain de 2 parties en une étape. Supposons que deux ou trois parties soient découposables par une application de largeur 2 à une étape donnée, alors on peut faire directement cette découpe en 4 ou 6 parties avec une seule application de largeur 3 ; on a un gain de 2 ou 4 parties en une étape ; en particulier, c’est vrai pour des parties de taille 2, donc découposables en 2 singletons. Donc, le cas le plus défavorable est d’avoir une unique partie de taille 2, pour un gain de 1 partie en une étape. Mais ce cas ne peut se produire qu’une fois, si on attend la fin pour découper toutes les parties de taille 2. Et le cas le plus défavorable si on ignore cette partie de taille 2, c’est de devoir découper en

2 puis une sous-partie en 3, alors que l'autre sous-partie est un singleton, car on a un gain de 3 parties en deux étapes soit $\frac{3}{2}$ gagné en une étape. Le cas où on doit découper en 2 puis les deux sous-parties en 3 a un gain de 5 parties en 3 étapes soit $\frac{5}{3} (> \frac{3}{2})$ gagné en une étape. Comme on doit gagner en tout $n - 1$ parties, on a : $\Lambda_{\max}(n, 3) \leq 1 + \lceil \frac{2}{3} \times (n - 2) \rceil$. On peut voir que cette borne est optimale si on prend la construction suivante : une première découpe en 2 dont un singleton suivie d'une deuxième découpe en 3 dont deux singletons, on répète ces deux étages l fois, puis on termine par une découpe en 2. Cela donne $n = 3 \times l + 2$ découpés en $2 \times l + 1$ étapes, et $1 + \lceil \frac{2}{3} \times ((3 \times l + 2) - 2) \rceil = 1 + \lceil \frac{2}{3} \times (3 \times l) \rceil = 1 + 2 \times l$.

Pour $K = 4$, le raisonnement précédent sur les découpes de parties de taille 2 s'applique, y compris pour les grouper avec des découpes en 3 en une seule découpe en 4. Couper en 2 puis en 4 donne un gain de 4 parties en 2 étapes, ce qui est équivalent au gain de 2 parties en 1 étape quand on coupe en 3, la différence étant sur une dernière découpe en 2 après une découpe en 2 puis en 4. Donc, on obtient $\Lambda_{\max}(n, 4) \leq 1 + \lceil \frac{1}{2} \times (n - 2) \rceil$.

Pour $K = 5$, on peut à présent grouper deux découpes en 3 (parallèles ou consécutives) en une seule découpe en 5. Couper en 2 puis en 5 donne un gain de 5 parties en 2 étapes, mais permet une dernière découpe en 2 après une découpe en 2 puis en 5. Et c'est bien un cas plus défavorable que d'alterner des découpes en 3 puis 4 qui donnent aussi un gain de 5 parties en 2 étapes, et permet une dernière découpe en 3 après une découpe en 3 puis en 4. Donc, on obtient $\Lambda_{\max}(n, 5) \leq 1 + \lceil \frac{2}{5} \times (n - 2) \rceil$.

Pour $K = 2 \times k, k \geq 3, k \in \mathbb{N}$, on peut grouper deux découpes en au plus k (parallèles ou consécutives) en une seule découpe en K , de même pour tout couple de découpe en au plus l et $2 \times k + 1 - l$ parties. Couper en 2 puis en K donne un gain de K parties en 2 étapes, mais permet une dernière découpe en 2 après une découpe en 2 puis en K . Et c'est bien un cas plus défavorable que d'avoir des découpes en $k + 1$ ou bien une alternance moins prononcée que 2 et K à cause du gain final. Donc, on obtient $\Lambda_{\max}(n, K) \leq 1 + \lceil \frac{2}{K} \times (n - 2) \rceil$.

Pour $K = 2 \times k + 1, k \geq 3, k \in \mathbb{N}$, on peut grouper deux découpes en au plus $k + 1$ (parallèles ou consécutives) en une seule découpe en K , de même pour tout couple de découpe en au plus l et $2 \times k + 2 - l$ parties. Couper en 2 puis en K donne un gain de K parties en 2 étapes, mais permet une dernière découpe en 2 après une découpe en 2 puis en K . Et c'est bien un cas plus défavorable que d'avoir des découpes en alternance moins prononcée que 2 et K à cause du gain final. Donc, on obtient $\Lambda_{\max}(n, K) \leq 1 + \lceil \frac{2}{K} \times (n - 2) \rceil$.

On obtient ainsi :

Théorème 6.2. *Dans une décomposition arborescente questionnable sans redondance inutile, $1 \leq \Lambda \leq n - 1$, $1 \leq \Lambda \leq 1 + \lceil \frac{2}{K} \times (n - 2) \rceil$ si $K \geq 2$.*

On constate que : $K \times \Lambda \leq 2 \times K + 2 \times (n - 2) = 2 \times (K + n - 2)$.

6.3 Profondeurs

Les trois profondeurs sont liées, car une borne sur la profondeur structurelle multipliée par la longueur d'application est notre seul moyen général de borner les autres profondeurs actuellement. Et cette borne est atteinte pour toutes les structures binaires

qui généralisent les cographes, qu'on décompose avec un arbre binaire ou bien avec un unique nœud interne adjacent à toutes les feuilles. Peut-être qu'une meilleure borne existe quand la profondeur structurelle, la largeur et la longueur d'application sont plus grandes que leur minimum simultanément.

Dans cette sous-section, on suppose que l'on a fait des élagages lourds pour ne pas garder inutilement des nœuds de degré 1.

Grâce au lemme 5.11, on voit tout de suite que pour les types 1-serré, 1-court, 1-moyen et 1-large, il ne sert à rien d'avoir une profondeur structurelle supérieure à $n - 1$.

Lemme 6.3. *Dans une décomposition arborescente questionnable 1-serrée, 1-courte, 1-moyenne ou 1-large sans redondance inutile, $1 \leq \alpha \leq n - 1$, $\Lambda \leq \beta \leq \gamma \leq \Lambda \times \alpha \leq \Lambda \times n - 1$. Et même $\beta \leq \gamma \leq \frac{n \times (n-1)}{2}$, car le nombre de sommets augmente d'au moins un à chaque niveau, et $\Lambda \leq n - 1$.*

La dernière borne $\beta \leq \gamma \leq \frac{n \times (n-1)}{2}$ est atteinte, notamment avec des structures binaires où toutes les adjacences sont distinctes et la décomposition du lemme 7.6 dans Lyaudet (2019).

Grâce au lemme 5.12, on voit tout de suite que pour les types ϵ -serré, ϵ -court, ϵ -moyen et ϵ -large, il ne sert à rien d'avoir une profondeur structurelle supérieure à $\frac{n^2}{2} - 1$.

Lemme 6.4. *Dans une décomposition arborescente questionnable ϵ -serrée, ϵ -courte, ϵ -moyenne ou ϵ -large sans redondance inutile, $1 \leq \alpha \leq \frac{n^2}{2} - 1$, $\Lambda \leq \beta \leq \gamma \leq \Lambda \times \alpha \leq \Lambda \times (\frac{n^2}{2} - 1)$.*

Il est possible qu'une meilleure borne existe pour les types " ϵ ". Par contre, nous n'avons encore aucune borne pour les types " p ", ce qui est embarrassant.

6.4 Degré

Pour simplifier, on considère dans cette sous-section que toutes les structures binaires ont au moins 3 sommets.

Grâce au corollaire 5.19, on a :

Lemme 6.5. *Dans une décomposition arborescente questionnable 1-courte, 1-moyenne ou 1-large sans redondance inutile, $2 \leq \Delta \leq n$.*

Grâce au corollaire 5.21 et au fait qu'un singleton exclusif est disjoint des paires, on a :

Lemme 6.6. *Dans une décomposition arborescente questionnable 1-serrée sans redondance inutile, $2 \leq \Delta \leq \frac{n \times (n-1)}{2}$.*

Grâce au corollaire 5.24 et au fait qu'un singleton exclusif est disjoint des paires avec questions valides, on a :

Lemme 6.7. *Dans une décomposition arborescente questionnable ϵ -courte, ϵ -moyenne ou ϵ -large sans redondance inutile, $2 \leq \Delta \leq \frac{n \times (n-1)}{2}$.*

Grâce au corollaire 5.26, au fait qu'un singleton exclusif est disjoint des paires avec ou sans questions valides, et qu'une paire avec question valide exclut la même paire avec ou sans question valide, on a :

Lemme 6.8. *Dans une décomposition arborescente questionnable ϵ -serrée sans redondance inutile, $2 \leq \Delta \leq \frac{n \times (n-1)}{2}$.*

6.5 Surjectivité

Dans cette sous-section, nous donnons quelques résultats sur le nombre maximum de feuilles Σ que l'on peut obtenir dans une décomposition arborescente questionnable après élagage. Par les résultats de la section précédente, ce nombre maximum (et minimum) de feuilles est égal au nombre de sommets pour les largeurs 1-moyenne et 1-large.

Voici un exemple optimal valable pour les décompositions arborescentes questionnaires 1-courtes.

Exemple 6.9. *À la racine, on a tous les n sommets à répartir dans deux fils. On associe chaque fils à un sous-ensemble différent de $n - 1$ sommets. Soient x, y les sommets exclus. Donc la racine est un point de jonction serré ou court uniquement pour $\{x, y\}$, ce que l'on règle par une application de largeur 2. On recommence au niveau en dessous avec 4 sous-ensembles à $n - 2$ sommets, etc. On obtient donc un arbre de profondeur $n - 1$, tous les nœuds internes sont de degré 2. On obtient donc $\Sigma = 2^{n-1}$ feuilles comme valeur possible pour une décomposition arborescente questionnable 1-courte de largeur 2 (ou plus). On a aussi $\sigma = 2^{n-2}$ si on garde toujours un même sommet commun dans toutes les paires finales.*

Cet exemple est optimal pour les décompositions 1-courtes, car :

- si on n'a que deux fils sous chaque nœud, clairement on a tout intérêt à leur donner le maximum de sommets communs, et on ne peut pas faire plus que cet exemple, par le lemme 5.8,
- si on a plus que deux fils sous chaque nœud, par le lemme 5.18, on ne peut pas faire mieux que " $\delta \times \text{feuilles_possibles}(n - \delta + 1)$ ";
et comme " $\text{feuilles_possibles}(i+1) \geq 2 \times \text{feuilles_possibles}(i)$ ", augmenter le degré conduit à une perte exponentielle.

Théorème 6.10. *Dans une décomposition arborescente questionnable 1-courte sans redondance inutile, $1 \leq \sigma \leq 2^{n-2}$, $n \leq \Sigma \leq 2^{n-1}$.*

Pour la largeur 1-serrée, voici un exemple :

Exemple 6.11. *À la racine, on a tous les n sommets à répartir dans les fils. Si le degré n'est pas borné, on peut associer trois fils à un sous-ensemble différent de $n - 1$ sommets. On recommence au niveau en dessous avec 9 sous-ensembles à $n - 2$ sommets, etc. On obtient donc un arbre de profondeur $n - 1$, les nœuds de niveau 1 sont de degré 2, ceux de niveau 2 et au dessus sont tous de degré 3. Seuls les nœuds de niveau 1 ont une application pour fixer une adjacence. On obtient donc $\Sigma = 2 \times 3^{n-2}$ comme valeur possible pour une décomposition arborescente questionnable 1-serrée*

de largeur 2 (ou plus), car seuls les nœuds de niveau 1 sont des points de jonction serrés. On a aussi $\sigma = 3^{n-2}$ si on garde toujours un même sommet commun dans toutes les paires finales.

Grâce au lemme 5.20, on évite d'avoir la même construction que l'exemple 6.11 avec $n-1$ fils, puis $n-2$ fils, etc. qui aurait abouti à $n!$ feuilles. Et grâce au lemme 5.15, on peut même aller plus loin, car ces trois fils à chaque niveau contiennent bien des redondances.

Pour la largeur 1-serrée, voici un exemple optimal :

Exemple 6.12. À la racine, on a tous les n sommets à répartir dans les fils. Si le degré n'est pas borné, on peut associer trois fils dont deux à un sous-ensemble différent de $n-1$ sommets, et le troisième est la racine d'une cerise pour fixer l'adjacence entre les deux sommets exclus des deux fils principaux. On recommence au niveau en dessous avec 4 sous-ensembles à $n-2$ sommets et deux cerises, etc. On obtient donc un arbre de profondeur $n-1$, les nœuds de niveau 1 sont de degré 2, ceux de niveau 2 et au dessus sont tous de degré 3. Seuls les nœuds de niveau 1 ont une application pour fixer une adjacence. Il y a exactement $2^{n-2} - 1$ nœuds de degré 3. Et dans un arbre régulier de degré 3 à k nœuds internes, le nombre de feuilles c'est $3 + 2 \times (k-1)$. On obtient donc $\Sigma = 2 \times (3 + 2 \times (2^{n-2} - 1 - 1)) = 2 \times (3 + 2^{n-1} - 4) = 2^n - 2$ comme valeur possible pour une décomposition arborescente questionnable 1-serrée de largeur 2 (ou plus), car seuls les nœuds de niveau 1 sont des points de jonction serrés. On a aussi $\sigma = 2^{n-2}$ si on garde toujours un même sommet commun dans toutes les paires finales des deux fils principaux.

Cet exemple montre que, pour les décompositions 1-serrées, la surjectivité globale maximale fait plus que doubler pour chaque sommet supplémentaire au delà de 2, et que la surjectivité individuelle maximale double ou peut-être fait plus que doubler pour chaque sommet supplémentaire au delà de 2.

Lemme 6.13. Parmi les décompositions arborescentes questionnables 1-serrées qui maximisent la surjectivité globale et la surjectivité individuelle, il y en a toujours une telle que :

- pour toute paire de sommets sous un nœud non-racine de cerise, il existe un fils qui contient cette paire de sommets,
- aucun nœud qui n'est pas la racine d'une cerise n'a de fils-feuille,
- la largeur K vaut 2, la longueur d'application Λ et la profondeur d'application β valent 1 et seules les racines des cerises fixent des adjacences ; en particulier, toute adjacence est fixée dès que possible, et non dans des nœuds plus hauts,
- un nœud est de degré 2 si et seulement si c'est la racine d'une cerise,
- tout sommet sous un fils appartient à au moins une paire exclusive à ce fils,
- $\Delta \leq 3$.

Preuve :

Soit u un nœud avec les sommets F dans les fils sous lui. Clairement, quitte à augmenter le degré, pour toute paire dans F^2 , il existe un fils de u qui contient cette paire, car sauf si u est déjà lui-même la racine d'une cerise, on peut ajouter un fils-cerise qui fixe l'adjacence pour cette paire. (On a besoin de fixer l'adjacence pour

que cette cerise ne soit pas élagable, car sinon, elle n'apporte rien. Et en dehors du cas "1", ce n'est pas sans conséquence, car cela pourrait permettre d'autres élagages ailleurs dans l'arbre, cf. lemme 5.10 notamment.) Si le fils-cerise a deux sommets sous lui qui étaient dans des fils-feuilles de u , les surjectivités ne changent pas ; si le fils-cerise a un sommet sous lui qui était dans un fils-feuille de u , la surjectivité globale augmente de 1 et la surjectivité individuelle reste stable ou augmente de 1 ; si le fils-cerise n'a pas de sommet sous lui qui était dans un fils-feuille de u , la surjectivité globale augmente de 2 et la surjectivité individuelle reste stable ou augmente de 1. Cela implique qu'aucun nœud tel que $|F| \geq 3$ n'a de fils-feuille, car soit ce fils-feuille peut être élagué par le lemme 5.9, soit il ajoute des paires à F^2 qui peuvent conduire à l'ajout d'un fils-cerise ; en particulier, cela s'applique aux nœuds de degré 2 qui n'ont qu'un seul fils-feuille et aux nœuds de degré supérieur. Donc aucun nœud qui n'est pas la racine d'une cerise n'a de fils-feuille.

D'où, seules les racines des cerises sont des points de jonction serrés qui sont donc les seuls à avoir besoin d'une application qui fixe une adjacence, et la largeur vaut 2, la longueur d'application et la profondeur d'application valent 1. En faisant cela, on a supprimé toutes les applications sur des nœuds qui ne sont pas des racines de cerises, et on a une décomposition arborescente questionnable "D.Q.P." (Dès Que Possible). Cette étape de nettoyage des applications internes est cruciale, car elle interdit de revenir en arrière avec un élagage partiel ou total d'une des cerises ajoutées, sans créer de point de jonction serré sur un nœud interne et donc un chemin montant serré sans question valide ; ce qui est incompatible avec le type 1-serré. De même, comme on considère le type 1-serré et que l'on n'a pas fait évoluer F pour tout nœud interne, si un autre type d'élagage est possible après, il était possible avant.

Si un nœud de degré 2 n'a pas de fils-feuille, et qu'aucun de ses deux fils ne peut élaguer l'autre, ils ont chacun un sommet exclusif, et donc une paire de sommets qui peut avoir l'ajout d'une cerise comme précédemment. Donc, un nœud est de degré 2 si et seulement si c'est la racine d'une cerise.

Appliquons à présent le lemme 5.15. On voit que les nœuds de degré supérieur à 2 ne sont pas des points de jonction serrés. Le lemme s'applique sauf si l'élagage fait qu'une paire de sommets n'est plus dans les feuilles d'au moins un fils. Donc, tout sommet sous un fils appartient à au moins une paire exclusive à ce fils.

Supposons que l'on ait un meilleur exemple avec des nœuds de degré supérieur à 3. Prenons un tel nœud u , aucun de ses fils n'a un ensemble de sommets inclus dans l'ensemble de sommets d'un autre fils, par le lemme 5.8. Si l'on fusionne deux fils, on obtient un seul fils avec au moins un sommet de plus, ce qui est strictement mieux pour la surjectivité globale et au moins aussi bien pour la surjectivité individuelle. Cette fusion de deux fils peut permettre des élagages, dans le cas où le nouveau fils contient toutes les paires de sommets qui étaient exclusives à un autre fils avant la fusion (un autre fils distinct des fils fusionnés), cf. Corollaire 5.21. Supposons par l'absurde que l'on a au moins 4 fils tels que la fusion de n'importe quelle paire de ces fils, disons u_1 et u_2 , contient toutes les paires de sommets qui étaient exclusives avant la fusion à un autre fils, disons u_3 . Comme tout sommet

sous un fils appartient à au moins une paire exclusive à ce fils, $F_3 \subseteq (F_1 \cup F_2)$. De même, si un autre nœud u_i est dans la même situation que u_3 , on a $F_i \subseteq (F_1 \cup F_2)$. Donc, sauf si $(F_1 \cup F_2) = F$, on peut prendre tous ces (au moins 3) fils et les mettre dans une sous-branche qui devient un nouveau fils, et faire baisser le degré de u . Si ça bloque, $(F_1 \cup F_2) = F$, donc si ça bloque pour toute paire de fils u_i et u_j , alors $(F_i \cup F_j) = F, \forall i, j \in \delta, i \neq j$. Donc si un sommet de F n'est pas sous un fils, il est sous tous les autres fils, et au plus un fils n'a pas un sommet donné de F . Donc, toutes les paires exclusives, disons $\{x, y\}$ qui ne sont ni dans un premier fils, ni dans un second fils sont forcément dans un troisième fils. Donc on peut élaguer tous les autres fils au delà de 3. ■

Il ne reste plus qu'à montrer que le découpage en 3 proposé dans l'exemple 6.12 maximise les surjectivités parmi les découpages en 3.

Pour la surjectivité individuelle, notre construction garde un sommet dans les 2 plus grosses branches sur les 3 à chaque niveau. Si on essaye de le mettre dans les 3 branches, il faut que chaque branche ait un autre sommet exclusif pour ne pas avoir d'élagage possible. Donc, on obtient au plus $\sigma_{max}(n-2) \times 3$ au lieu de $\sigma_{max}(n-1) \times 2$, comme $\sigma_{max}(n) \geq 2 \times \sigma_{max}(n-1)$, on a $\sigma_{max}(n-2) \times 2 \leq \sigma_{max}(n-1) \Leftrightarrow \sigma_{max}(n-2) \times 3 \leq \sigma_{max}(n-1) \times 1, 5 < \sigma_{max}(n-1) \times 2$, on ne peut pas faire mieux que l'exemple proposé.

Pour la surjectivité globale, supposons que la plus petite branche contienne au moins 3 sommets, chacun fait partie d'une paire exclusive à cette branche. Mais donc, il y a au moins deux paires exclusives qui ne peuvent partager qu'un seul sommet commun au plus. Si elles n'ont pas de sommet commun, les deux plus grosses branches doivent éviter au moins deux sommets chacune, et comme on obtient au plus $\Sigma_{max}(n-2) \times 3$ au lieu de $\Sigma_{max}(n-1) \times 2 + 2$, et que $\Sigma_{max}(n) > 2 \times \Sigma_{max}(n-1) > 1,5 \times \Sigma_{max}(n-1)$, la surjectivité globale baisse. Si elles ont un sommet commun x , la plus grosse branche peut éviter uniquement x , mais la seconde plus grosse branche doit en éviter au moins deux (si elle évite x , elle doit en éviter un autre pour ne pas contenir la plus grosse branche; et sinon elle doit éviter les deux autres sommets des paires exclusives de la troisième branche). Et comme on obtient au plus $\Sigma_{max}(n-1) + \Sigma_{max}(n-2) \times 2$ au lieu de $\Sigma_{max}(n-1) \times 2 + 2$, et que $\Sigma_{max}(n) > 2 \times \Sigma_{max}(n-1)$, on a $\Sigma_{max}(n-2) \times 2 < \Sigma_{max}(n-1) \Rightarrow \Sigma_{max}(n-2) \times 2 < \Sigma_{max}(n-1) + 2 \Leftrightarrow \Sigma_{max}(n-1) + \Sigma_{max}(n-2) \times 2 < \Sigma_{max}(n-1) \times 2 + 2$, et la surjectivité globale baisse.

Théorème 6.14. *Dans une décomposition arborescente questionnable 1-serrée sans redondance inutile, $1 \leq \sigma \leq 2^{n-2}$, $n \leq \Sigma \leq 2^n - 2$.*

Rappelons que dans Lyaudet (2019), nous avons montré que l'on décompose toute structure binaire avec un peigne de profondeur $n - 1$ et de degré 2 qui forme une décomposition arborescente questionnable bijective. L'intérêt principal de ces exemples est de démontrer les limites de nos techniques actuelles d'élagage, ainsi que celles de nos résultats pour faire baisser le degré, car ici aucun des paramètres ne donne de bon résultat.

L'exemple 6.12 ne marche pas pour les décompositions arborescentes questionnables 1-courtes, car on doit avoir une application sur chaque nœud interne et par le lemme 5.18 on peut élaguer le fils non-principal.

Trouver le nombre maximum de feuilles dans les décompositions de type “ ϵ ” nous semble un problème de combinatoire extrême intéressant, car nous pensons que Δ^α donne une borne beaucoup trop grande par rapport au pire cas réel. Même si le cas ϵ -large est déjà résolu par le corollaire 5.22. Un autre problème non résolu est de minimiser uniquement σ dans les exemples 6.9 et 6.12, car on voit facilement que pour n un peu plus grand, on peut avoir $\sigma \leq 2^{n-3}$.

6.6 Bilan des bornes actuelles

Pour résumer, voici les valeurs minimums pour les paramètres :

Paramètres	Types
$(2; 1; 1, 1, 1; 2; 1, n)$	Tous

Et voici nos connaissances actuelles sur les valeurs maximums des paramètres, relativement à nos résultats d'élagage :

Paramètres	Types
$(n; n-1; n-1, \frac{n \times (n-1)}{2}, \frac{n \times (n-1)}{2}; n; 1, n)$	Bijective
$(n; n-1; n-1, \frac{n \times (n-1)}{2}, \frac{n \times (n-1)}{2}; n; 2^{n-2}, 2^{n-1})$	1-courte
$(n; n-1; n-1, \frac{n \times (n-1)}{2}, \frac{n \times (n-1)}{2}; 2^{n-2}, 2^n - 2)$	1-serrée
$(n; n-1; \frac{n^2}{2} - 1?, (n-1) \times (\frac{n^2}{2} - 1)?, (n-1) \times (\frac{n^2}{2} - 1)?; \frac{n \times (n-1)}{2}; n-1, n \times (n-1))$	ϵ -large
$(n; n-1; \frac{n^2}{2} - 1?, (n-1) \times (\frac{n^2}{2} - 1)?, (n-1) \times (\frac{n^2}{2} - 1)?; \frac{n \times (n-1)}{2}; 2^{n-2}?, 2^n - 2?)$	ϵ -serrée, courte ou moyenne
$(n; n-1; ?, ?, ?, ?, ?)$	“ p ”

Ci-dessus, nous avons omis les bornes $\Lambda \leq 1 + \lceil \frac{2}{K} \times (n-2) \rceil$.

7 Comparaisons de décompositions universelles

Les exemples de la sous-section 6.5 marchent pour toute structure binaire et permettent aussi d'avoir des repères sur les arbitrages entre les différents paramètres des décompositions arborescentes questionnables. Voici un comparatif de 8 exemples qui décomposent toute structure binaire. Chacun de ces exemples est meilleur sur au moins un paramètre, sauf pour les exemples 6.11, 6.12 qui peuvent être grandement améliorés :

Exemple 7.1. *À la racine, on a tous les n sommets à répartir dans les fils. On partitionne l'ensemble de sommets en 3 parties A, B, C de taille au plus $\lceil \frac{n}{3} \rceil$. On peut associer trois fils à un sous-ensemble différent d'au plus $\lceil \frac{2 \times n}{3} \rceil$ sommets. On recommence au niveau en dessous avec 9 sous-ensembles à $\lceil \frac{4 \times n}{9} \rceil$ sommets, etc. Les nœuds de niveau 1 sont de degré 2, ceux de niveau 2 et au dessus sont tous de degré 3. Seuls les nœuds de niveau 1 ont une application pour fixer une adjacence.*

Pour calculer la profondeur de cet exemple de décomposition universelle, on constate que $r_0 = n, r_{i+1} = r_i \times \frac{2}{3}$ implique que $r_i = n \times \frac{2^i}{3}$, et donc $r_i \leq 1 \Leftrightarrow i \geq \log_{\frac{3}{2}}(n)$. Si on pose $n_0 = n, n_{i+1} = \lceil n_i \times \frac{2}{3} \rceil$, comme $\lceil \lceil r \rceil \times \frac{2}{3} \rceil \leq \lceil r \times \frac{2}{3} + \frac{2}{3} \rceil$, on a

$n_i \leq n \times \frac{2^i}{3} + \sum_{j=0}^{i-1} \frac{2^j}{3} \leq n \times \frac{2^i}{3} + \frac{1-\frac{2^i}{3}}{1-\frac{2}{3}} < n \times \frac{2^i}{3} + \frac{1}{\frac{1}{3}} = n \times \frac{2^i}{3} + 3$,
 c'est-à-dire $n_i < r_i + 3$. D'où $n_i < 4 \Leftrightarrow n \times \frac{2^i}{3} \leq 1 \Leftrightarrow i \geq \log_{\frac{3}{2}}(n)$. Or
 $n_i < 4 \Leftrightarrow n_i \leq 3$, car n_i est entier. Et comme il faut 2 étapes de découpe pour
 un ensemble de 3 sommets, la profondeur totale est au plus $2 + \lceil \log_{\frac{3}{2}}(n) \rceil$, dont un
 niveau de degré 2 et non 3. Le nombre de feuilles global, la surjectivité globale, est
 au plus $2 \times 3^{1+\lceil \log_{\frac{3}{2}}(n) \rceil} < 2 \times 3^{2+\log_{\frac{3}{2}}(n)} \leq 2 \times 9 \times 3^{\log_{\frac{3}{2}}(n)} \leq 18 \times 3^{\log_{\frac{3}{2}}(n)} \leq$
 $18 \times e^{\ln(3) \times (\frac{\ln(n)}{\ln(\frac{3}{2})})} \leq 18 \times n^{\frac{\ln(3)}{\ln(\frac{3}{2})}} \leq 18 \times n^{2,709511291}$. Pour la surjectivité individuelle,
 cela donne déjà qu'elle vaut au plus $2^{1+\lceil \log_{\frac{3}{2}}(n) \rceil} < 2^{2+\log_{\frac{3}{2}}(n)} \leq 4 \times 2^{\log_{\frac{3}{2}}(n)} \leq$
 $4 \times e^{\ln(2) \times (\frac{\ln(n)}{\ln(\frac{3}{2})})} \leq 4 \times n^{\frac{\ln(2)}{\ln(\frac{3}{2})}} \leq 4 \times n^{1,709511291}$. Et cela montre aussi que la surjec-
 tivité globale peut être améliorée à $n \times 4 \times n^{1,709511291} \leq 4 \times n^{2,709511291}$. Donc, pour
 cet exemple, le calcul de la surjectivité globale en passant par celui de la surjectivité
 individuelle est plus précis.

(Noter que $\frac{\ln(2)}{\ln(\frac{3}{2})} + 1 = \frac{\ln(2)}{\ln(3)-\ln(2)} + 1 = \frac{\ln(2)+\ln(3)-\ln(2)}{\ln(3)-\ln(2)} = \frac{\ln(3)}{\ln(3)-\ln(2)} = \frac{\ln(3)}{\ln(\frac{3}{2})}$.)

On peut faire encore mieux. Nous allons le voir en deux étapes. La première étape
 est une légère variante, alors que la seconde nécessite des calculs plus poussés. Pour
 calculer la profondeur, on constate que $r_i \leq 2 \Leftrightarrow n \times \frac{2^i}{3} \leq 2 \Leftrightarrow \frac{n}{2} \times \frac{2^i}{3} \leq 1 \Leftrightarrow$
 $i \geq \log_{\frac{3}{2}}(\frac{n}{2})$. Comme $n_i < r_i + 3$, $n_i < 5 \Leftrightarrow n \times \frac{2^i}{3} \leq 2 \Leftrightarrow i \geq \log_{\frac{3}{2}}(\frac{n}{2})$. Or
 $n_i < 5 \Leftrightarrow n_i \leq 4$, car n_i est entier. Et comme il faut 3 étapes de découpe pour un
 ensemble de 4 sommets, la profondeur totale est au plus $3 + \lceil \log_{\frac{3}{2}}(\frac{n}{2}) \rceil$, dont un niveau
 de degré 2 et non 3. Ce qui donne pour la surjectivité individuelle : $\sigma \leq 2^{2+\lceil \log_{\frac{3}{2}}(\frac{n}{2}) \rceil} <$
 $2^{3+\log_{\frac{3}{2}}(\frac{n}{2})} \leq 8 \times 2^{\log_{\frac{3}{2}}(\frac{n}{2})} \leq 8 \times e^{\ln(2) \times (\frac{\ln(\frac{n}{2})}{\ln(\frac{3}{2})})} \leq 8 \times e^{\ln(2) \times (\frac{\ln(n)-\ln(2)}{\ln(\frac{3}{2})})} \leq 8 \times$
 $e^{\frac{\ln(2) \times (\frac{\ln(n)}{\ln(\frac{3}{2})})}{\ln(2) \times (\frac{\ln(2)}{\ln(\frac{3}{2})})}} \div e^{\frac{\ln(2) \times (\frac{\ln(2)}{\ln(\frac{3}{2})})}{\ln(2) \times (\frac{\ln(2)}{\ln(\frac{3}{2})})}} \leq 8 \times n^{\frac{\ln(2)}{\ln(\frac{3}{2})}} \div e^{\frac{\ln(2) \times (\frac{\ln(2)}{\ln(\frac{3}{2})})}{\ln(2) \times (\frac{\ln(2)}{\ln(\frac{3}{2})})}} \leq 8 \times n^{1,709511291} \div$
 $e^{\ln(2) \times 1,709511291} \leq 8 \times n^{1,709511291} \div e^{1,84942932} \leq 8 \times n^{1,709511291} \div 3,22100884 \leq$
 $2,483693898 \times n^{1,709511291}$. Donc $\Sigma \leq 2,483693898 \times n^{2,709511291}$.

Si l'on essaye en calculant les premières valeurs de trouver la borne optimale pour
 la profondeur de l'exemple précédent, on constate qu'elle est au mieux un de moins
 que la borne donnée ci-dessus, c'est-à-dire $2 + \lceil \log_{\frac{3}{2}}(\frac{n}{2}) \rceil$. Nous allons montrer que
 la borne $2 + \lceil \log_{\frac{3}{2}}(\frac{n}{2}) \rceil$ est exacte dans cette troisième étape. Un simple script montre
 que l'on alterne entre des plages de plus en plus longues entre cette borne et une valeur
 plus petite. Les premières valeurs qui atteignent la borne sont : 10, 14, 15, 20 à 22, 29 à
 34, 43 à 51, 64 à 76, 95 à 115, 142 à 172. Cette suite d'entiers n'existe pas encore dans
 OEIS. Si l'on prend les nombres qui débutent une plage où cette borne est atteinte,
 on semble obtenir une sous-suite de <https://oeis.org/A003312>, $a(1) = 3$;
 $a(n+1) = a(n) + \lfloor \frac{a(n)-1}{2} \rfloor$. Si l'on prend les nombres qui finissent une plage où
 cette borne est atteinte, on semble obtenir une sous-suite de <https://oeis.org/A147788>, $a(n) = \lfloor 2 \times (\frac{3}{2})^n \rfloor$. On vérifie facilement que pour $n = 10$ et $n = 14$,
 par exemple, on obtient $2 + \lceil \log_{\frac{3}{2}}(\frac{n}{2}) \rceil$. ($\lceil \frac{2}{3} \times 14 \rceil = 10$, $\lceil \frac{2}{3} \times 10 \rceil = 7$, $\lceil \frac{2}{3} \times 7 \rceil = 5$,
 $\lceil \frac{2}{3} \times 5 \rceil = 4$, $\lceil \frac{2}{3} \times 4 \rceil = 3$, $\lceil \frac{2}{3} \times 3 \rceil = 2$.)

La formule de récurrence de début de plage est $n_{i+1} = n_i + \lfloor \frac{n_i-1}{2} \rfloor$. Or, on voit
 tout de suite que :

— si n_i est pair, $\lceil \frac{2}{3} \times (n_i + \lfloor \frac{n_i-1}{2} \rfloor) \rceil = \lceil \frac{2}{3} \times (n_i + \frac{n_i}{2} - 1) \rceil = \lceil n_i - \frac{2}{3} \rceil = n_i$;

- si n_i est impair, $\lceil \frac{2}{3} \times (n_i + \lfloor \frac{n_i-1}{2} \rfloor) \rceil = \lceil \frac{2}{3} \times (n_i + \frac{n_i}{2} - \frac{1}{2}) \rceil = \lceil n_i - \frac{1}{3} \rceil = n_i$.
- Et de plus, on constate que si on prend $n_{i+1} = n_i + \lfloor \frac{n_i-1}{2} \rfloor - 1$, on a
- si n_i est pair, $\lceil \frac{2}{3} \times (n_i + \lfloor \frac{n_i-1}{2} \rfloor - 1) \rceil = \lceil \frac{2}{3} \times (n_i + \frac{n_i}{2} - 2) \rceil = \lceil n_i - \frac{4}{3} \rceil = n_i - 1$;
 - si n_i est impair, $\lceil \frac{2}{3} \times (n_i + \lfloor \frac{n_i-1}{2} \rfloor - 1) \rceil = \lceil \frac{2}{3} \times (n_i + \frac{n_i}{2} - \frac{3}{2}) \rceil = \lceil n_i - 1 \rceil = n_i - 1$.

Donc la récurrence de début de plage, indépendamment de sa condition initiale, nous donne le plus petit entier suivant tel qu'un découpage en deux tiers équilibré par valeur entière supérieure donne le nombre entier de départ. C'est ce nombre qui minimise le logarithme en base trois demis, donc qui maximise la constante additive.

Une autre formule de récurrence est $n_{i+1} = n_i + \lceil \frac{n_i-1}{2} \rceil = n_i + \lfloor \frac{n_i}{2} \rfloor$. Or, on voit tout de suite que :

- si n_i est pair, $\lceil \frac{2}{3} \times (n_i + \lceil \frac{n_i-1}{2} \rceil) \rceil = \lceil \frac{2}{3} \times (n_i + \frac{n_i}{2}) \rceil = \lceil n_i \rceil = n_i$;
 - si n_i est impair, $\lceil \frac{2}{3} \times (n_i + \lceil \frac{n_i-1}{2} \rceil) \rceil = \lceil \frac{2}{3} \times (n_i + \frac{n_i}{2} - \frac{1}{2}) \rceil = \lceil n_i - \frac{1}{3} \rceil = n_i$.
- Et de plus, on constate que si on prend $n_{i+1} = n_i + \lceil \frac{n_i-1}{2} \rceil + 1$, on a
- si n_i est pair, $\lceil \frac{2}{3} \times (n_i + \lceil \frac{n_i-1}{2} \rceil + 1) \rceil = \lceil \frac{2}{3} \times (n_i + \frac{n_i}{2} + 1) \rceil = \lceil n_i + \frac{2}{3} \rceil = n_i + 1$;
 - si n_i est impair, $\lceil \frac{2}{3} \times (n_i + \lceil \frac{n_i-1}{2} \rceil + 1) \rceil = \lceil \frac{2}{3} \times (n_i + \frac{n_i}{2} - \frac{1}{2} + 1) \rceil = \lceil n_i + \frac{1}{3} \rceil = n_i + 1$.

Donc cette autre récurrence, indépendamment de sa condition initiale, nous donne le plus grand entier suivant tel qu'un découpage en deux tiers équilibré par valeur entière supérieure donne le nombre entier de départ. Mais cette valeur est inférieure aux valeurs de fin de plage que nous avons trouvées.

Pour montrer la borne exacte, il faut montrer que la valeur du logarithme en base trois demis reste toujours suffisamment importante pour que la partie constante puisse toujours rester à 2 au lieu de devoir passer à 3, qui est notre constante additive démontrée dans la deuxième étape. Il faut donc une borne inférieure sur l'augmentation du logarithme. De plus, clairement cette augmentation est minimale quand on prend un entier le plus petit possible tout en augmentant la profondeur de 1 ce qui correspond à la récurrence de début de plage. Montrons donc une borne inférieure sur $\lceil \log_{\frac{3}{2}}(\frac{n_i + \lfloor \frac{n_i-1}{2} \rfloor}{2}) \rceil$. Nous aurons besoin d'une borne inférieure sur des termes de la forme $\ln(1-x)$. On utilise le développement en série infinie quand $0 < x < 1$.

$$\begin{aligned}
\ln(1-x) &= -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k} \\
&= -x - \frac{x^2}{2} - \sum_{k=3}^{\infty} \frac{x^k}{k} \\
&> -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \times \sum_{k=0}^{\infty} x^k \\
&= -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3 \times (1-x)}
\end{aligned} \tag{1}$$

On constate que pour $0 < x \leq a < 1$, on a de plus $\frac{x^3}{3 \times (1-x)} < \frac{x^2 \times a}{3 \times (1-a)}$ et donc $\ln(1-x) > -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^2 \times a}{3 \times (1-a)} = -x - x^2 \times (\frac{1}{2} + \frac{a}{3 \times (1-a)})$. Gardons en mémoire

pour $0 < x \leq a < 1$, $\ln(1-x) > -x - x^2 \times (\frac{1}{2} + \frac{a}{3 \times (1-a)})$.

Nous attaquons à présent la suite d'inégalités principale :

$$\begin{aligned}
\left\lceil \log_{\frac{3}{2}} \left(\frac{n_{i+1}}{2} \right) \right\rceil &= \left\lceil \log_{\frac{3}{2}} \left(\frac{n_i + \lfloor \frac{n_i-1}{2} \rfloor}{2} \right) \right\rceil \\
&\geq \left\lceil \log_{\frac{3}{2}} \left(\frac{n_i + \frac{n_i-1}{2} - 1}{2} \right) \right\rceil \\
&= \left\lceil \log_{\frac{3}{2}} \left(\frac{n_i + \frac{n_i}{2} - \frac{3}{2}}{2} \right) \right\rceil \\
&= \left\lceil \log_{\frac{3}{2}} \left(\frac{3}{2} \times \frac{n_i}{2} - \frac{3}{4} \right) \right\rceil \\
&= \left\lceil \log_{\frac{3}{2}} \left(\frac{3}{2} \times \frac{n_i}{2} \times \left(1 - \frac{\frac{3}{4}}{\frac{3}{2} \times \frac{n_i}{2}} \right) \right) \right\rceil \\
&= \left\lceil 1 + \log_{\frac{3}{2}} \left(\frac{n_i}{2} \right) + \log_{\frac{3}{2}} \left(1 - \frac{1}{n_i} \right) \right\rceil \\
&\geq i + \left\lceil \log_{\frac{3}{2}} \left(\frac{n_1}{2} \right) + \sum_{k=1}^i \log_{\frac{3}{2}} \left(1 - \frac{1}{n_k} \right) \right\rceil \\
&\geq i + \left\lceil \log_{\frac{3}{2}} \left(\frac{n_1}{2} \right) + \sum_{k=1}^{\infty} \log_{\frac{3}{2}} \left(1 - \frac{1}{n_k} \right) \right\rceil \\
&= i + \left\lceil \log_{\frac{3}{2}} \left(\frac{n_1}{2} \right) + \frac{1}{\ln(\frac{3}{2})} \times \sum_{k=1}^{\infty} \ln \left(1 - \frac{1}{n_k} \right) \right\rceil \\
&\geq i + \left\lceil \log_{\frac{3}{2}} \left(\frac{n_1}{2} \right) + \frac{1}{\ln(\frac{3}{2})} \times \left(\sum_{k=1}^{\infty} -\frac{1}{n_k} - \frac{1}{n_k^2} \times \left(\frac{1}{2} + \frac{\frac{1}{n_1}}{3 \times \left(1 - \frac{1}{n_1} \right)} \right) \right) \right\rceil \\
&\geq i + \left\lceil \log_{\frac{3}{2}} \left(\frac{n_1}{2} \right) + \frac{1}{\ln(\frac{3}{2})} \times \left(\sum_{k=1}^{\infty} -\frac{1}{n_k} - \frac{1}{n_k^2} \times \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3 \times (n_1 - 1)} \right) \right) \right\rceil
\end{aligned} \tag{2}$$

Notons à présent que $n_{i+1} = n_i + \lfloor \frac{n_i-1}{2} \rfloor$ implique :

$$\begin{aligned}
n_{i+1} &> n_i + \frac{n_i - 1}{2} - 1 \\
&= n_i + \frac{n_i}{2} - \frac{3}{2} \\
&= \frac{3}{2} \times (n_i - 1),
\end{aligned} \tag{3}$$

ce qui implique :

$$\begin{aligned}
\frac{n_{i+1}}{n_i} &> \frac{3}{2} \times \frac{n_i - 1}{n_i} \\
&= \frac{3 \times n_1 - 3}{2 \times n_1}.
\end{aligned} \tag{4}$$

Donc

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n_k} &< \frac{1}{n_1} \times \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\frac{3 \times n_1 - 3}{2 \times n_1}} \right)^k \\
&= \frac{1}{n_1} \times \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{2 \times n_1}{3 \times n_1 - 3} \right)^k \\
&= \frac{1}{n_1} \times \frac{1}{1 - \frac{2 \times n_1}{3 \times n_1 - 3}} \\
&= \frac{1}{n_1} \times \frac{1}{\frac{3 \times n_1 - 3 - 2 \times n_1}{3 \times n_1 - 3}} \\
&= \frac{1}{n_1} \times \frac{3 \times n_1 - 3}{n_1 - 3} \\
&= \frac{3 \times n_1 - 3}{n_1 \times (n_1 - 3)}.
\end{aligned} \tag{5}$$

De même,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n_k^2} &< \frac{1}{n_1^2} \times \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\frac{3 \times n_1 - 3}{2 \times n_1}} \right)^{2k} \\
&= \frac{1}{n_1^2} \times \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{2 \times n_1}{3 \times n_1 - 3} \right)^{2k} \\
&= \frac{1}{n_1^2} \times \frac{1}{1 - \left(\frac{2 \times n_1}{3 \times n_1 - 3} \right)^2} \\
&= \frac{1}{n_1^2} \times \frac{1}{\frac{(3 \times n_1 - 3)^2 - (2 \times n_1)^2}{(3 \times n_1 - 3)^2}} \\
&= \frac{1}{n_1^2} \times \frac{(3 \times n_1 - 3)^2}{9 \times n_1^2 - 18 \times n_1 + 9 - 4 \times n_1^2} \\
&= \frac{(3 \times n_1 - 3)^2}{n_1^2 \times (5 \times n_1^2 - 18 \times n_1 + 9)}.
\end{aligned} \tag{6}$$

Donc

$$\begin{aligned}
\left\lceil \log_{\frac{3}{2}} \left(\frac{n_{i+1}}{2} \right) \right\rceil &\geq i + \left\lceil \log_{\frac{3}{2}} \left(\frac{n_1}{2} \right) + \frac{1}{\ln \left(\frac{3}{2} \right)} \times \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n_k} - \frac{1}{n_1^2} \times \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3 \times (n_1 - 1)} \right) \right) \right\rceil \\
&= i + \left\lceil \log_{\frac{3}{2}} \left(\frac{n_1}{2} \right) + \frac{1}{\ln \left(\frac{3}{2} \right)} \times \left(- \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n_k} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n_k^2} \times \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3 \times (n_1 - 1)} \right) \right) \right\rceil \\
&\geq i + \left\lceil \log_{\frac{3}{2}} \left(\frac{n_1}{2} \right) + \frac{1}{\ln \left(\frac{3}{2} \right)} \right. \\
&\quad \times \left(- \frac{3 \times n_1 - 3}{n_1 \times (n_1 - 3)} - \frac{(3 \times n_1 - 3)^2}{n_1^2 \times (5 \times n_1^2 - 18 \times n_1 + 9)} \times \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3 \times (n_1 - 1)} \right) \right) \left. \right\rceil.
\end{aligned} \tag{7}$$

Ce qui donne pour $n_1 = 10$,

$$\begin{aligned}
\left\lceil \log_{\frac{3}{2}} \left(\frac{n_{i+1}}{2} \right) \right\rceil &\geq i + \left\lceil \log_{\frac{3}{2}}(5) + \frac{1}{\ln\left(\frac{3}{2}\right)} \right. \\
&\quad \times \left(-\frac{3 \times 10 - 3}{10 \times (10 - 3)} - \frac{(3 \times 10 - 3)^2}{10^2 \times (5 \times 10^2 - 18 \times 10 + 9)} \times \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3 \times (10 - 1)} \right) \right) \left. \right\rceil \\
&\geq i + \left\lceil 3,969 + 2,467 \times \left(-\frac{27}{70} - \frac{27^2}{100 \times (500 - 180 + 9)} \times \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{27} \right) \right) \right\rceil \\
&= i + \left\lceil 3,969 + 2,467 \times \left(-\frac{27}{70} - \frac{27^2}{100 \times 329} \times \frac{29}{54} \right) \right\rceil \\
&= i + \left\lceil 3,969 + 2,467 \times \left(-\frac{27}{70} - \frac{27}{32900} \times \frac{29}{2} \right) \right\rceil \\
&\geq i + \lceil 3,969 + 2,467 \times (-0,386 - 0,012) \rceil \\
&= i + \lceil 3,969 - 2,467 \times 0,398 \rceil \\
&\geq i + \lceil 2,987 \rceil, \text{ raté.}
\end{aligned} \tag{8}$$

Ce qui donne pour $n_1 = 14$,

$$\begin{aligned}
\left\lceil \log_{\frac{3}{2}} \left(\frac{n_{i+1}}{2} \right) \right\rceil &\geq i + \left\lceil \log_{\frac{3}{2}}(7) + \frac{1}{\ln\left(\frac{3}{2}\right)} \right. \\
&\quad \times \left(-\frac{3 \times 14 - 3}{14 \times (14 - 3)} - \frac{(3 \times 14 - 3)^2}{14^2 \times (5 \times 14^2 - 18 \times 14 + 9)} \times \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3 \times (14 - 1)} \right) \right) \left. \right\rceil \\
&\geq i + \left\lceil 4,799 + 2,467 \times \left(-\frac{39}{154} - \frac{39^2}{196 \times (5 \times 196 - 252 + 9)} \times \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{39} \right) \right) \right\rceil \\
&= i + \left\lceil 4,799 + 2,467 \times \left(-\frac{39}{154} - \frac{39^2}{196 \times 737} \times \frac{41}{78} \right) \right\rceil \\
&= i + \left\lceil 4,799 + 2,467 \times \left(-\frac{39}{154} - \frac{39}{144452} \times \frac{41}{2} \right) \right\rceil \\
&\geq i + \lceil 4,799 + 2,467 \times (-0,254 - 0,006) \rceil \\
&= i + \lceil 4,799 - 2,467 \times 0,260 \rceil \\
&\geq i + \lceil 4,157 \rceil \\
&\geq i + \left\lceil \log_{\frac{3}{2}} \left(\frac{n_1}{2} \right) \right\rceil, \text{ gagné.}
\end{aligned} \tag{9}$$

Comme clairement

$$\left\lceil \log_{\frac{3}{2}} \left(\frac{n_{i+1}}{2} \right) \right\rceil \leq i + \left\lceil \log_{\frac{3}{2}} \left(\frac{n_1}{2} \right) \right\rceil, \tag{10}$$

on a forcément

$$\left\lceil \log_{\frac{3}{2}} \left(\frac{n_{i+1}}{2} \right) \right\rceil = i + \left\lceil \log_{\frac{3}{2}} \left(\frac{n_1}{2} \right) \right\rceil, \tag{11}$$

donc c'est gagné aussi pour montrer que la borne est atteinte infiniment souvent.

Théorème 7.2. *Pour l'exemple 7.1 de décomposition universelle, on a $\alpha \leq 2 + \lceil \log_{\frac{3}{2}}(\frac{n}{2}) \rceil$, $\sigma \leq 1,241846949 \times n^{1,709511291}$, $\Sigma \leq 1,241846949 \times n^{2,709511291}$. (On a aussi $\alpha \geq 1 + \lceil \log_{\frac{3}{2}}(\frac{n}{2}) \rceil$, etc.)*

Nous n'avons pas trouvé d'antériorité pour la borne optimale. Comme ce découpage en deux tiers est très fréquent en combinatoire, nous serions heureux si un lecteur ou une lectrice connaît une publication plus ancienne qui donne ce résultat et prendrait le temps de nous écrire un courriel pour nous en informer. (Notez qu'il est possible de se tromper en lisant des articles où le découpage s'arrête une fois qu'on a des parties de taille 2, car alors la profondeur est comprise entre $\lceil \log_{\frac{3}{2}}(\frac{n}{2}) \rceil$ et $1 + \lceil \log_{\frac{3}{2}}(\frac{n}{2}) \rceil$, et si l'article ou le livre montre la borne $2 + \lceil \log_{\frac{3}{2}}(\frac{n}{2}) \rceil$, cela correspond en vrai à notre deuxième borne $3 + \lceil \log_{\frac{3}{2}}(\frac{n}{2}) \rceil$ et non à la borne optimale.)

Soit a le nombre de types d'adjacences distincts dans une structure binaire ($a = 2$ pour les graphes simples non-orientés). Notons $b = \min(n-1, a)$ et $c = \min(\frac{n \times (n-1)}{2}, a \times (n-1)) = \min(\frac{n}{2}, a) \times (n-1)$.

Paramètres	Types	Origine
$(n; 1; 1, 1, 1; n; 1, n)$	Tous	Trivial
$(n; 1; \lceil \lg(n) \rceil, 1, \lceil \lg(n) \rceil; 2; 1, n)$	Tous	Trivial
$(2; \leq b; n-1, \leq c, \leq c; 2; 1, n)$	Tous	Lemme 7.6 Lyaudet (2019)
$(2; 1; 2, 1, 2; \frac{n \times (n-1)}{2}; n-1, n \times (n-1))$	1-serré et ϵ	Exemple 1.1
$(2; 1; \lceil \lg(n) + \lg(n-1) \rceil, 1, \lceil \lg(n) + \lg(n-1) \rceil; 2; n-1, n \times (n-1))$	ϵ	Corollaire 4.5
$(2; 1; n-1, n-1, n-1; 2; 2^{n-3}, 2^{n-1})$	1-court et ϵ	Exemple 6.9
$(2; 1; n-1, 1, n-1; 3; 2^{n-3}, 2^{n-2})$	1-serré et ϵ	Exemple 6.12
$(2; 1; 2 + \lceil \log_{\frac{3}{2}}(\frac{n}{2}) \rceil, 1, 2 + \lceil \log_{\frac{3}{2}}(\frac{n}{2}) \rceil; 3; 1, 25 \times n^{1,71}, 1, 25 \times n^{2,71})$	1-serré et ϵ	Exemple 7.1

Voici un zoom sur les paramètres :

K	Λ	α	β	γ	Δ	σ	Σ
n	1	1	1	1	n	1	n
n	1	$\lceil \lg(n) \rceil$	1	$\lceil \lg(n) \rceil$	2	1	n
2	$\leq \min(n-1, a)$	$n-1$	$\leq \min(\frac{n}{2}, a) \times (n-1)$	$\leq \min(\frac{n}{2}, a) \times (n-1)$	2	1	n
2	1	2	1	2	$\frac{n \times (n-1)}{2}$	$n-1$	$n \times (n-1)$
2	1	$\lceil \lg(n) + \lg(n-1) \rceil$	1	$\lceil \lg(n) + \lg(n-1) \rceil$	2	$n-1$	$n \times (n-1)$
2	1	$n-1$	$n-1$	$n-1$	2	2^{n-3}	2^{n-1}
2	1	$n-1$	1	$n-1$	3	2^{n-3}	$2^n - 2$
2	1	$2 + \lceil \log_{\frac{3}{2}}(\frac{n}{2}) \rceil$	1	$2 + \lceil \log_{\frac{3}{2}}(\frac{n}{2}) \rceil$	3	$1,25 \times n^{1,71}$	$1,25 \times n^{2,71}$

8 Conclusion

Après cette étude, seule la largeur arborescente questionnable suivante reste vraiment ouverte dans le cas non-bijectif : celle 1-serrée, équilibrée et de degré 2 qui est équivalente à celle 1-courte équilibrée et de degré 2. Les types “ ϵ ” sont trop puissants et décomposent tout, peu importe les contraintes supplémentaires. Il reste aussi le problème ouvert plus classique de la largeur arborescente questionnable bijective. Nos contre-exemples comportaient beaucoup de structures redondantes et un peu stupides ; il est possible que des procédures de canonisation des décompositions aboutissent à des égalités de certains types, une fois canonisés. Les résultats d'élagage sont

un premier pas dans cette direction, mais il faudra sans doute des résultats de transformation plus complexes. Beaucoup de choses sont paramétrables avec la largeur arborescente questionnable, surtout dans le cas non-bijectif. On pourrait encore davantage complexifier le problème en regardant diverses bornes sur le degré (bornes logarithmiques par exemple), ou des bornes sur la “surjectivité”, comme demander qu’un sommet de la structure binaire corresponde à au plus un nombre logarithmique de feuilles (que σ soit logarithmique). D’ailleurs parmi les 8 paramètres des décompositions arborescentes questionnables que nous avons explicités, seuls σ et Σ ne sont pas bornés supérieurement par un polynôme en n ; trouver un meilleur encadrement de ces paramètres grâce à des transformations qui font peu augmenter les autres paramètres est une de nos priorités. On pourrait même autoriser des questions invalides, et se contenter de vouloir une majorité de questions valides (en passant de 8 paramètres à 20 paramètres : 3 paramètres pour la proportion de chemins montants serrés avec une question valide, la proportion de chemins montants serrés sans question, la proportion de chemins montants serrés avec une question invalide, à répéter pour court, moyen, et large); dans ce cas ou bien pour les variantes avec proportion, on pourrait étudier des échantillonnages probabilistes, etc.

Une autre idée que nous avons dû avoir entre 2019 et 2022 est celle d’appliquer le principe de premières différences non plus sur des chemins, non plus sur des arbres, mais sur des ordres partiels bien-fondés. En effet, tous les ingrédients sont réunis avec les notions de points de jonctions et de chemins montants; on aurait une nouvelle possibilité d’avoir plusieurs chemins montants pour un même point de jonction. Cela donnerait des décompositions opalescentes questionnables (opa pour ordre partiel).

On pourrait aussi étendre le principe de premières différences “2-aire” à un principe de premières différences d’arité supérieure, comme nous avons posé la question dans Lyaudet (2020). Par exemple, pour 3 sommets, il suffit de considérer que “l’adjacence”/l’hyper-arête entre ces 3 sommets est fixée par la première application qui fait que les 3 sommets sont envoyés sur 3 sommets distincts. On peut faire de même pour des types d’adjacence/des hyper-arêtes d’arité supérieure. Si l’on reprend la notation des 2-structures dans le livre Ehrenfeucht et al. (1999), on peut généraliser en (a) -structures et $(\leq a)$ -structures. Il serait intéressant de savoir si les paramètres des décompositions questionnables des $(\leq a)$ -structures sont bornés par une fonction des paramètres des décompositions questionnables des (b) -structures obtenues par projection sur les relations d’arité b pour $b \leq a$. Déjà, avec les relations ternaires on peut modéliser l’arithmétique de Peano des nombres entiers strictement positifs; on aurait les 6 types d’adjacence suivants : pas d’hyper-arête, une hyper-arête avec 3 places $p_1 < p_2 < p_3$ et $p_1 + p_2 = p_3$, une hyper-arête avec 3 places $p_1 = p_2 < p_3$ et $p_1 + p_2 = p_3$, une hyper-arête avec 3 places $p_1 < p_2 < p_3$ et $p_1 \times p_2 = p_3$, une hyper-arête avec 3 places $p_1 = p_2 < p_3$ et $p_1 \times p_2 = p_3$, la combinaison des deux hyper-arêtes avec 3 places $p_1 = p_2 < p_3$ et $p_1 + p_2 = p_3$ plus $p_1 = p_2 < p_3$ et $p_1 \times p_2 = p_3$ car $2 + 2 = 2 \times 2 = 4$;). Pour le principe de premières différences sur des arbres, donc les décompositions arborescentes questionnables, avec des arités supérieures, il faudrait remettre sur le métier l’étude des points de jonction, car seuls les points de jonction serrés a -aire ont une définition évidente. Les points de jonction serrés sont les feuilles de l’arbre commun aux a sommets. Les points de jonction courts sont les nœuds de l’arbre commun aux a sommets qui pour chacun des a sommets ont

au moins un fils qui ne contient que ce sommet parmi les a sommets. Les points de jonction moyens sont les nœuds de l'arbre commun aux a sommets qui pour au moins un des a sommets a au moins un fils qui ne contient que ce sommet parmi les a sommets. Les points de jonction larges sont les nœuds de l'arbre commun aux a sommets qui ont au moins deux fils dans l'arbre union des arbres des a sommets. Mais contrairement au cas 2-aire, où il ne restait que des variantes de points de jonction avec des critères de nombres de fils/de branches qui semblaient factices et peu pertinents, le cas a -aire pourrait donner lieu à d'autres types de points de jonction basés sur une majorité des a sommets ou d'autres critères qui pourraient avoir un sens.

Enfin, pour trouver la motivation et l'énergie de continuer à travailler seul sur ces sujets, nous ne prenons pas de café, mais nous faisons des plans sur la comète. Voici un exemple de plan sur la comète. Actuellement, le consensus est qu'il n'y a sans doute pas de problème qui soit complet pour la classe $NP \cap co-NP$. Mais il y a peut-être moyen de "tricher", par exemple en prenant un problème PSPACE-complet et en ne gardant que les instances qui ont un certificat positif et un certificat négatif. Peut-être qu'un tel problème existe sur des 2-structures, ou avec une arité supérieure. Et comme il y a un nombre exponentiel de décompositions universelles comme l'exemple 7.1, peut-être aussi que certaines d'entre elles fournissent un certificat positif et d'autres un certificat négatif (On a toujours des décompositions, mais seules certaines donnent des algorithmes polynomiaux.). Il faudrait deux réductions : une qui préserve les certificats positifs de cette manière, et une qui préserve les certificats négatifs de cette manière aussi. La difficulté serait d'avoir une synchronisation des deux réductions pour qu'elles donnent la même instance du problème PSPACE-complet sur des 2-structures. Et on pourrait s'approcher d'un résultat de convergence des certificats. En effet, si $P = (NP \cap co-NP)$, l'entrée peut servir à la fois de certificat positif et négatif. On pourrait tricher en disant que c'est toujours le cas pour un problème dans $NP \cap co-NP$, en fusionnant les deux certificats pour que les bits de rang pair codent le certificat positif et les bits de rang impair codent le certificat négatif ; la machine de Turing qui prouve n'utilise que les bits de rang pair du certificat mixte ; la machine de Turing qui prouve l'impossibilité n'utilise que les bits de rang impair du certificat mixte ; la taille du certificat mixte reste polynomiale. Mais faire comme ça avec la parité des rangs des bits ne nous apprend rien, alors qu'une synchronisation de décompositions universelles pour montrer qu'une seule décomposition universelle peut servir à la fois de certificat positif et négatif serait sans doute plus intéressante. On pourrait imaginer une sorte de lemme d'échange entre décompositions universelles pour les "synchroniser"/les rapprocher.

Voilà, c'est la fin de DAQ Ô DAQ ;) XD.

Merci Dieu ! Merci Père ! Merci Jésus ! Merci Saint-Esprit ! Je remercie aussi Copilot qui m'a permis de ne pas perdre trop de temps à réinventer la roue sur certains calculs :).

Références

A. Ehrenfeucht, T. Harju, and G. Rozenberg. *The Theory of 2-Structures - A Framework for Decomposition and Transformation of Graphs*. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 1999. ISBN 981-02-4042-2.

- L. Lyaudet. On finite width questionable representations of orders. *CoRR*, abs/1903.02028, 2019. URL <https://arxiv.org/abs/1903.02028>.
- L. Lyaudet. First difference principle applied to modular/questionable-width, clique-width, and rank-width of binary structures. *preprint*, abs/202009, 2020. URL https://lyaudet.eu/laurent/Publi/Journaux/LL2020LargeursStructuresBinaires/LL2020LargeursStructuresBinaires_v5.pdf.
- L. Lyaudet. Diviser n'est pas régner? *preprint*, abs/202205, 2022. URL https://lyaudet.eu/laurent/Publi/Journaux/LL2022DiviserNestPasRegner/LL2022DiviserNestPasRegner_v6.pdf.
- L. Lyaudet. On tree-width and tree-questionable-width. *preprint*, abs/202506-2, 2025a. URL https://lyaudet.eu/laurent/Publi/Journaux/LL2025TreewidthTreequestionablewidth/LL2025TreewidthTreequestionablewidth_en_v2.pdf.
- L. Lyaudet. Sur la largeur arborescente et la largeur arborescente questionnable. *preprint*, abs/202506-1, 2025b. URL https://lyaudet.eu/laurent/Publi/Journaux/LL2025TreewidthTreequestionablewidth/LL2025TreewidthTreequestionablewidth_fr_v2.pdf.
- W. Sierpiński. Généralisation d'un théorème de Cantor concernant les ensembles ordonnés dénombrables. *Fundamenta Mathematicae*, 18 :280–284, 1932.

Archive

FR V1 2025/06/12 :

https://lyaudet.eu/laurent/Publi/Journaux/LL2025LAQNonBijective/LL2025LAQNonBijective_fr_v1.pdf

EN V1 2025/06/12 :

https://lyaudet.eu/laurent/Publi/Journaux/LL2025LAQNonBijective/LL2025LAQNonBijective_en_v1.pdf

FR V2 2025/06/15 :

https://lyaudet.eu/laurent/Publi/Journaux/LL2025LAQNonBijective/LL2025LAQNonBijective_fr_v2.pdf

EN V2 2025/06/15 :

https://lyaudet.eu/laurent/Publi/Journaux/LL2025LAQNonBijective/LL2025LAQNonBijective_en_v2.pdf

FR V3 2025/06/30 :

https://lyaudet.eu/laurent/Publi/Journaux/LL2025LAQNonBijective/LL2025LAQNonBijective_fr_v3.pdf

EN V3 2025/06/30 :

https://lyaudet.eu/laurent/Publi/Journaux/LL2025LAQNonBijective/LL2025LAQNonBijective_en_v3.pdf

FR V4 2025/11/24 cette version :

https://lyaudet.eu/laurent/Publi/Journaux/LL2025LAQNonBijective/LL2025LAQNonBijective_fr_v4.pdf

EN V4 2025/11/24 :

https://lyaudet.eu/laurent/Publi/Journaux/LL2025LAQNonBijective/LL2025LAQNonBijective_en_v4.pdf