Lemmes sur les fonctions plancher et plafond

Laurent Lyaudet[*]

3 décembre 2025

Résumé

Quelques lemmes simples sur les fonctions plancher et plafond.

Version initiale : 2025/12/02 Version courante : 2025/12/03

Mots-clés : partie entière, partie entière inférieure, partie entière supérieure, fonction plancher, fonction plafond.

Cette note contient des lemmes simples sur les fonctions plancher et plafond, sur comment passer de l'une à l'autre. Ils ne sont pas dans le livre Graham et al. (1989), mais ils pourraient pourtant très bien y figurer, éventuellement comme exercices assez faciles. Nous avons fait une recherche bibliographique sans succès, mais il est possible qu'ils soient déjà dans la littérature. Auquel cas, nous serions heureux de recevoir un courriel avec la bonne référence.

Notation : Pour deux entiers a et b, on note $a \div b$ le quotient entier de a divisé par b; et on note $a \bmod^+ b$ le "modulo supérieur" avec $a \bmod^+ b = b$ si $a \bmod b = 0$, et $a \bmod^+ b = a \bmod b$ si $a \bmod b > 0$. Possible que le "modulo supérieur" existe déjà dans la littérature. Là encore, nous serions heureux de recevoir un courriel avec la bonne référence.

Commençons par quelques observations qui figurent déjà dans le folklore : si $k \in \mathbb{N}$, $\lceil \frac{k}{2} \rceil = \lfloor \frac{k+1}{2} \rfloor$ (Graham et al. (1989) par exemple), ou $\lceil k \times \frac{2}{3} \rceil = \lfloor (k+1) \times \frac{2}{3} \rfloor$ (OEIS Foundation Inc. (2025)). Apparemment, personne n'a pris le temps de généraliser ces observations du folklore, mais on voit bien que :

Lemme 0.1. *Soit* $k, a \in \mathbb{N}, a \geq 1$, *alors* $\lceil k \times \frac{a-1}{a} \rceil = \lfloor (k+1) \times \frac{a-1}{a} \rfloor$.
Notons que $\frac{a-1}{a} = 1 - \frac{1}{a}$.

Preuve :

> Idée : L'écart $(k+1) \times \frac{a-1}{a} - k \times \frac{a-1}{a} = \frac{a-1}{a} < 1$. Donc si ces deux valeurs sont de part et d'autre d'un entier b, alors $b = \lceil k \times \frac{a-1}{a} \rceil = \lfloor (k+1) \times \frac{a-1}{a} \rfloor$. Preuve formelle : $\lceil k \times \frac{a-1}{a} \rceil = \lceil k \times (1 - \frac{1}{a}) \rceil = \lceil k - \frac{k}{a} \rceil = k + \lceil -\frac{k}{a} \rceil = k - \lfloor \frac{k}{a} \rfloor$ et $\lfloor (k+1) \times \frac{a-1}{a} \rfloor = \lfloor (k+1) \times (1 - \frac{1}{a}) \rfloor = \lfloor (k+1) - \frac{k+1}{a} \rfloor = k + 1 + \lfloor -\frac{k+1}{a} \rfloor = k + 1 - \lceil \frac{k+1}{a} \rceil$. Soit $q = k \div a$. On a $k - \lfloor \frac{k}{a} \rfloor = k - q$ et $k + 1 - \lceil \frac{k+1}{a} \rceil = k + 1 - (q+1) = k - q$.
> ■

[*] `https://lyaudet.eu/laurent/`, laurent.lyaudet@gmail.com

Notons que ça ne peut pas se généraliser davantage. Quelques exemples de blocage : $\lceil 1 \times \frac{1}{3} \rceil > \lfloor 2 \times \frac{1}{3} \rfloor$, $\lceil 2 \times \frac{3}{5} \rceil > \lfloor 3 \times \frac{3}{5} \rfloor$, $\lceil 0 \times \frac{3}{5} \rceil < \lfloor 2 \times \frac{3}{5} \rfloor$, $\lceil 3 \times \frac{3}{5} \rceil < \lfloor 5 \times \frac{3}{5} \rfloor$, $\lceil 3 \times \frac{5}{7} \rceil > \lfloor 4 \times \frac{5}{7} \rfloor$, $\lceil 0 \times \frac{5}{7} \rceil < \lfloor 2 \times \frac{5}{7} \rfloor$, $\lceil 1 \times \frac{5}{7} \rceil < \lfloor 3 \times \frac{5}{7} \rfloor$. Un dernier exemple qui montre que k doit être entier : $\lceil \frac{a}{3\times(a-1)} \times \frac{a-1}{a} \rceil = 1 \neq \lfloor (\frac{a}{3\times(a-1)} + 1) \times \frac{a-1}{a} \rfloor = \lfloor \frac{1}{3} + \frac{a-1}{a} \rfloor = 0$.

Notons qu'on a aussi le lemme connu (voir Graham et al. (1989)) :

Lemme 0.2. *Soit* $k, a \in \mathbb{N}, a \geq 1$, *alors* $\lceil k \times \frac{1}{a} \rceil = \lfloor (k + a - 1) \times \frac{1}{a} \rfloor$.

Lemme 0.3. *Soit* $k, l, a \in \mathbb{N}, a \geq 2$. *Si* $m = k + \lceil \frac{k}{a-1} \rceil$ *et* $M = k + \lceil \frac{k+1}{a-1} \rceil$, *alors* $\lfloor l \times \frac{a-1}{a} \rfloor = k \Leftrightarrow m \leq l \leq M$.

Preuve :

Soit $m = k + \lceil \frac{k}{a-1} \rceil$.

On a $\lfloor m \times \frac{a-1}{a} \rfloor = \lfloor (k + \lceil \frac{k}{a-1} \rceil) \times \frac{a-1}{a} \rfloor = \lfloor (k + \frac{k}{a-1} + \frac{(a-1)-k \bmod^+ (a-1)}{a-1}) \times \frac{a-1}{a} \rfloor = \lfloor k + \frac{(a-1)-k \bmod^+ (a-1)}{a} \rfloor = k$

et $\lfloor (m-1) \times \frac{a-1}{a} \rfloor = \lfloor (k + \lceil \frac{k}{a-1} \rceil - 1) \times \frac{a-1}{a} \rfloor = \lfloor (k + \frac{k}{a-1} + \frac{(a-1)-k \bmod^+ (a-1)}{a-1} - 1) \times \frac{a-1}{a} \rfloor = \lfloor k + \frac{(a-1)-k \bmod^+ (a-1)}{a} - \frac{a-1}{a} \rfloor = k - 1$.

Soit $M = k + \lceil \frac{k+1}{a-1} \rceil$.

On a $\lfloor M \times \frac{a-1}{a} \rfloor = \lfloor (k + \lceil \frac{k+1}{a-1} \rceil) \times \frac{a-1}{a} \rfloor = \lfloor (k + \frac{k+1}{a-1} + \frac{(a-1)-(k+1) \bmod^+ (a-1)}{a-1}) \times \frac{a-1}{a} \rfloor = \lfloor k + \frac{1}{a} + \frac{(a-1)-(k+1) \bmod^+ (a-1)}{a} \rfloor = k$

et $\lfloor (M+1) \times \frac{a-1}{a} \rfloor = \lfloor (k + \lceil \frac{k+1}{a-1} \rceil + 1) \times \frac{a-1}{a} \rfloor = \lfloor (k + \frac{k+1}{a-1} + \frac{(a-1)-(k+1) \bmod^+ (a-1)}{a-1} + 1) \times \frac{a-1}{a} \rfloor = \lfloor k + \frac{1}{a} + \frac{(a-1)-(k+1) \bmod^+ (a-1)}{a} + \frac{a-1}{a} \rfloor = k + 1$. ■

Lemme 0.4. *Soit* $k, l, a \in \mathbb{N}, a \geq 2$. *Si* $m = k + \lfloor \frac{k-1}{a-1} \rfloor$ *et* $M = k + \lfloor \frac{k}{a-1} \rfloor$, *alors* $\lceil l \times \frac{a-1}{a} \rceil = k \Leftrightarrow m \leq l \leq M$.

Preuve :

Soit $m = k + \lfloor \frac{k-1}{a-1} \rfloor$.

On a $\lceil m \times \frac{a-1}{a} \rceil = \lceil (k + \lfloor \frac{k-1}{a-1} \rfloor) \times \frac{a-1}{a} \rceil = \lceil (k + \frac{k-1}{a-1} - \frac{(k-1) \bmod (a-1)}{a-1}) \times \frac{a-1}{a} \rceil = \lceil k - \frac{1}{a} - \frac{(k-1) \bmod (a-1)}{a} \rceil = k$

et $\lceil (m-1) \times \frac{a-1}{a} \rceil = \lceil (k + \lfloor \frac{k-1}{a-1} \rfloor - 1) \times \frac{a-1}{a} \rceil = \lceil (k + \frac{k-1}{a-1} - \frac{(k-1) \bmod (a-1)}{a-1} - 1) \times \frac{a-1}{a} \rceil = \lceil k - \frac{1}{a} - \frac{(k-1) \bmod (a-1)}{a} - \frac{a-1}{a} \rceil = k - 1$.

Soit $M = k + \lfloor \frac{k}{a-1} \rfloor$.

On a $\lceil M \times \frac{a-1}{a} \rceil = \lceil (k + \lfloor \frac{k}{a-1} \rfloor) \times \frac{a-1}{a} \rceil = \lceil (k + \frac{k}{a-1} - \frac{k \bmod (a-1)}{a-1}) \times \frac{a-1}{a} \rceil = \lceil k - \frac{k \bmod (a-1)}{a} \rceil = k$

et $\lceil (M+1) \times \frac{a-1}{a} \rceil = \lceil (k + \lfloor \frac{k}{a-1} \rfloor + 1) \times \frac{a-1}{a} \rceil = \lceil (k + \frac{k}{a-1} - \frac{k \bmod (a-1)}{a-1} + 1) \times \frac{a-1}{a} \rceil = \lceil k - \frac{k \bmod (a-1)}{a} + \frac{a-1}{a} \rceil = k + 1$. ■

Ces parties entières sont assez courantes en combinatoire, par exemple $k \to \lceil k \times \frac{a-1}{a} \rceil$ correspond à un découpage récursif d'un ensemble de taille n où la plus grosse partie garde une certaine fraction des éléments de l'ensemble arrondie à l'entier supérieur. Ce découpage doit s'arrêter quand $n = a-1$. On peut alors compter le nombre d'étapes pour arriver à $a - 1$, c'est-à-dire la profondeur de l'arbre de découpes. Si l'on veut générer la suite des nombres d'étapes par ordre croissant des valeurs de n, la borne M ci-dessus est très utile. Voici un exemple de pseudo-code de générateur très efficace :

```
// Entree a ou a-1
b = a-1;
n = b;
M = b;
k = 0;
while(true){
  while(n <= M){
    yield k;
    ++n;
  }
  M += M/b;
  ++k;
}
/*
Exemple avec a = 3
n 2 3 4 5 6 7 8 9
M 2 3 4 6 6 9 9 9
k 0 1 2 3 3 4 4 4
*/
```

Le même raisonnement s'applique à un découpage récursif d'un ensemble de taille n où la plus grosse partie garde une certaine fraction des éléments de l'ensemble arrondie à l'entier inférieur. Ce découpage doit s'arrêter quand $n = 0$. Le pseudo-code de générateur est un petit peu moins efficace :

```
// Entree a ou a-1
b = a-1;
n = 0;
M = 0;
k = 0;
while(true){
  while(n <= M){
    yield k;
    ++n;
  }
  M += (M+b)/b;
  ++k;
}
```

```
/*
Exemple avec a = 3
n 0 1 2 3 4 5 6 7
M 0 1 2 4 4 7 7 7
k 0 1 2 3 3 4 4 4
*/
```

Depuis une semaine, je fais des ajouts à l'OEIS, et notamment la suite A061420. Et les éditeurs ne veulent pas qu'on soit trop prolixe en détails, en explications ou en généralisations, donc cet article est un peu un moyen d'échapper à la censure. Mais je comprends bien qu'on ne peut avoir un article complet sur chaque suite de l'OEIS.

Merci Dieu ! Merci Père ! Merci Jésus ! Merci Saint-Esprit !

Références

R. L. Graham, D. E. Knuth, and O. Patashnik. *Concrete Mathematics : A Foundation for Computer Science*. Addison-Wesley, Reading, 1989.

OEIS Foundation Inc. (2025). Entry A061420 in The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences. URL https://oeis.org/A061420.

Archive

FR V1 2025/12/03 cette version :
https://lyaudet.eu/laurent/Publi/Journaux/LL2025LPP/LL2025LPP_fr_v1.pdf
EN V1 2025/12/03 :
https://lyaudet.eu/laurent/Publi/Journaux/LL2025LPP/LL2025LPP_en_v1.pdf