

Lemmes sur les fonctions plancher et plafond

Laurent Lyaudet*

7 décembre 2025

Résumé

Quelques lemmes simples sur les fonctions plancher et plafond.

Version initiale : 2025/12/02 Version courante : 2025/12/07

Mots-clés : partie entière, partie entière inférieure, partie entière supérieure, fonction plancher, fonction plafond, fonction d'échange, modulo supérieur, modulo complémenté, manque, partie décimale, partie fractionnaire, manque décimal, manque fractionnaire.

Cette note contient des lemmes simples sur les fonctions plancher et plafond, sur comment passer de l'une à l'autre. Ils ne sont pas dans le livre Graham et al. (1989), mais ils pourraient pourtant très bien y figurer, éventuellement comme exercices assez faciles. Nous avons fait une recherche bibliographique sans succès, mais il est possible qu'ils soient déjà dans la littérature. Auquel cas, nous serions heureux de recevoir un courriel avec la bonne référence.

1 Définitions et notations

Définition 1.1. Soient deux nombres réels $r, s \in \mathbb{R}$. On note $\text{ech}_{r \leftrightarrow s}(x)$, la fonction d'échange définie par $\text{ech}_{r \leftrightarrow s}(r) = s$, $\text{ech}_{r \leftrightarrow s}(s) = r$, $\text{ech}_{r \leftrightarrow s}(x) = x$ sinon.

Pour deux entiers n et d , on note $n \div d$ le quotient entier de n divisé par d .

Définition 1.2. Soient deux nombres entiers $n, d \in \mathbb{N}$.

On note $n \bmod^+ d = \text{ech}_{0 \leftrightarrow d}(n \bmod d)$ le modulo supérieur.

On a $n \bmod^+ d \in \mathbb{N}$ et $1 \leq n \bmod^+ d \leq d$.

Définition 1.3. Soient deux nombres entiers $n, d \in \mathbb{N}$.

On note $n \bmod^c d = d - (n \bmod d)$ le modulo complémenté.

On a $n \bmod^c d \in \mathbb{N}$ et $1 \leq n \bmod^c d \leq d$.

Définition 1.4. Soient deux nombres entiers $n, d \in \mathbb{N}$.

On note $n \text{ manq } d = d - (n \bmod^+ d)$ le manque de n par d .

Informellement, $n \text{ manq } d = n \bmod^{+c} d = n \bmod^{c+} d$.

On a $n \text{ manq } d \in \mathbb{N}$ et $0 \leq n \text{ manq } d \leq d - 1$, comme le modulo classique.

*<https://lyaudet.eu/laurent/>, laurent.lyaudet@gmail.com

La partie décimale ou partie fractionnaire d'un nombre réel x est notée $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$.

Définition 1.5. Soit un nombre réel $x \in \mathbb{R}$.

On note $\{x\}^{+c}$ ou bien $\{x\}^{c+}$ le manque décimal ou manque fractionnaire de x , qui est défini par $\{x\}^{+c} = \lceil x \rceil - x = \text{ech}_{0 \leftrightarrow 1}(1 - \{x\})$.

On a $0 \leq \{x\}^{+c} < 1$, comme la partie décimale classique.

Il est possible que la fonction d'échange, le modulo supérieur, le modulo complémenté, le manque, le manque décimal/fractionnaire existent déjà dans la littérature. Là encore, nous serions heureux de recevoir un courriel avec la bonne référence.

2 Résultats

Commençons par quelques observations qui figurent déjà dans le folklore : si $k \in \mathbb{N}$, $\lceil \frac{k}{2} \rceil = \lfloor \frac{k+1}{2} \rfloor$ (Graham et al. (1989) par exemple), ou $\lceil k \times \frac{2}{3} \rceil = \lfloor (k+1) \times \frac{2}{3} \rfloor$ (OEIS Foundation Inc. (2025)). Apparemment, personne n'a pris le temps de généraliser ces observations du folklore, mais on voit bien que :

Lemme 2.1. Soient $k, a \in \mathbb{N}$, $a \geq 1$, alors $\lceil k \times \frac{a-1}{a} \rceil = \lfloor (k+1) \times \frac{a-1}{a} \rfloor$.
Notons que $\frac{a-1}{a} = 1 - \frac{1}{a}$.

Preuve :

Idée : L'écart $(k+1) \times \frac{a-1}{a} - k \times \frac{a-1}{a} = \frac{a-1}{a} < 1$. Donc si ces deux valeurs sont de part et d'autre d'un entier b , alors $b = \lceil k \times \frac{a-1}{a} \rceil = \lfloor (k+1) \times \frac{a-1}{a} \rfloor$.

Preuve formelle : $\lceil k \times \frac{a-1}{a} \rceil = \lceil k \times (1 - \frac{1}{a}) \rceil = \lceil k - \frac{k}{a} \rceil = k + \lceil -\frac{k}{a} \rceil = k - \lfloor \frac{k}{a} \rfloor$ et $\lfloor (k+1) \times \frac{a-1}{a} \rfloor = \lfloor (k+1) \times (1 - \frac{1}{a}) \rfloor = \lfloor (k+1) - \frac{k+1}{a} \rfloor = k+1 + \lfloor -\frac{k+1}{a} \rfloor = k+1 - \lceil \frac{k+1}{a} \rceil$. Soit $q = k \div a$. On a $k - \lfloor \frac{k}{a} \rfloor = k - q$ et $k+1 - \lceil \frac{k+1}{a} \rceil = k+1 - (q+1) = k - q$. ■

Notons que ça ne peut pas se généraliser davantage. Quelques exemples de blocage : $\lceil 1 \times \frac{1}{3} \rceil > \lfloor 2 \times \frac{1}{3} \rfloor$, $\lceil 2 \times \frac{3}{5} \rceil > \lfloor 3 \times \frac{3}{5} \rfloor$, $\lceil 0 \times \frac{3}{5} \rceil < \lfloor 2 \times \frac{3}{5} \rfloor$, $\lceil 3 \times \frac{3}{5} \rceil < \lfloor 5 \times \frac{3}{5} \rfloor$, $\lceil 3 \times \frac{5}{7} \rceil > \lfloor 4 \times \frac{5}{7} \rfloor$, $\lceil 0 \times \frac{5}{7} \rceil < \lfloor 2 \times \frac{5}{7} \rfloor$, $\lceil 1 \times \frac{5}{7} \rceil < \lfloor 3 \times \frac{5}{7} \rfloor$. Un dernier exemple qui montre que k doit être entier : $\lceil \frac{a}{3 \times (a-1)} \times \frac{a-1}{a} \rceil = 1 \neq \lfloor (\frac{a}{3 \times (a-1)} + 1) \times \frac{a-1}{a} \rfloor = \lfloor \frac{1}{3} + \frac{a-1}{a} \rfloor = 0$.

Notons qu'on a aussi le lemme connu (voir Graham et al. (1989)) :

Lemme 2.2. Soient $k \in \mathbb{Z}$, $a \in \mathbb{N}$, $a \geq 1$, alors $\lceil k \times \frac{1}{a} \rceil = \lfloor (k+a-1) \times \frac{1}{a} \rfloor$.

Lemme 2.3. Soient $k, l, a \in \mathbb{N}, a \geq 2$. Si $m = k + \lceil \frac{k}{a-1} \rceil$ et $M = k + \lceil \frac{k+1}{a-1} \rceil$, alors $\lfloor l \times \frac{a-1}{a} \rfloor = k \Leftrightarrow m \leq l \leq M$.

Preuve :

Soit $m = k + \lceil \frac{k}{a-1} \rceil$.

On a $\lfloor m \times \frac{a-1}{a} \rfloor = \lfloor (k + \lceil \frac{k}{a-1} \rceil) \times \frac{a-1}{a} \rfloor = \lfloor (k + \frac{k}{a-1} + \frac{k \operatorname{manq}(a-1)}{a-1}) \times \frac{a-1}{a} \rfloor = \lfloor k + \frac{k \operatorname{manq}(a-1)}{a} \rfloor = k$

et $\lfloor (m-1) \times \frac{a-1}{a} \rfloor = \lfloor (k + \lceil \frac{k}{a-1} \rceil - 1) \times \frac{a-1}{a} \rfloor = \lfloor (k + \frac{k}{a-1} + \frac{k \operatorname{manq}(a-1)}{a-1} - 1) \times \frac{a-1}{a} \rfloor = \lfloor k + \frac{k \operatorname{manq}(a-1)}{a} - \frac{a-1}{a} \rfloor = k-1$.

Soit $M = k + \lceil \frac{k+1}{a-1} \rceil$.

On a $\lfloor M \times \frac{a-1}{a} \rfloor = \lfloor (k + \lceil \frac{k+1}{a-1} \rceil) \times \frac{a-1}{a} \rfloor = \lfloor (k + \frac{k+1}{a-1} + \frac{(k+1) \operatorname{manq}(a-1)}{a-1}) \times \frac{a-1}{a} \rfloor = \lfloor k + \frac{1}{a} + \frac{(k+1) \operatorname{manq}(a-1)}{a} \rfloor = k$

et $\lfloor (M+1) \times \frac{a-1}{a} \rfloor = \lfloor (k + \lceil \frac{k+1}{a-1} \rceil + 1) \times \frac{a-1}{a} \rfloor = \lfloor (k + \frac{k+1}{a-1} + \frac{(k+1) \operatorname{manq}(a-1)}{a-1} + 1) \times \frac{a-1}{a} \rfloor = \lfloor k + \frac{1}{a} + \frac{(k+1) \operatorname{manq}(a-1)}{a} + \frac{a-1}{a} \rfloor = k+1$. ■

Par le lemme 2.2, on a aussi $m = k + \lceil \frac{k}{a-1} \rceil = k + \lfloor \frac{k+a-2}{a-1} \rfloor$, et $M = k + \lceil \frac{k+1}{a-1} \rceil = k + \lfloor \frac{k+1+a-2}{a-1} \rfloor = k + \lfloor \frac{k}{a-1} \rfloor + 1$.

Lemme 2.4. Soient $k, l, a \in \mathbb{N}, a \geq 2$. Si $m = k + \lfloor \frac{k-1}{a-1} \rfloor$ et $M = k + \lfloor \frac{k}{a-1} \rfloor$, alors $\lceil l \times \frac{a-1}{a} \rceil = k \Leftrightarrow m \leq l \leq M$.

Preuve :

Soit $m = k + \lfloor \frac{k-1}{a-1} \rfloor$.

On a $\lceil m \times \frac{a-1}{a} \rceil = \lceil (k + \lfloor \frac{k-1}{a-1} \rfloor) \times \frac{a-1}{a} \rceil = \lceil (k + \frac{k-1}{a-1} - \frac{(k-1) \bmod (a-1)}{a-1}) \times \frac{a-1}{a} \rceil = \lceil k - \frac{1}{a} - \frac{(k-1) \bmod (a-1)}{a} \rceil = k$

et $\lceil (m-1) \times \frac{a-1}{a} \rceil = \lceil (k + \lfloor \frac{k-1}{a-1} \rfloor - 1) \times \frac{a-1}{a} \rceil = \lceil (k + \frac{k-1}{a-1} - \frac{(k-1) \bmod (a-1)}{a-1} - 1) \times \frac{a-1}{a} \rceil = \lceil k - \frac{1}{a} - \frac{(k-1) \bmod (a-1)}{a} - \frac{a-1}{a} \rceil = k-1$.

Soit $M = k + \lfloor \frac{k}{a-1} \rfloor$.

On a $\lceil M \times \frac{a-1}{a} \rceil = \lceil (k + \lfloor \frac{k}{a-1} \rfloor) \times \frac{a-1}{a} \rceil = \lceil (k + \frac{k}{a-1} - \frac{k \bmod (a-1)}{a-1}) \times \frac{a-1}{a} \rceil = \lceil k - \frac{k \bmod (a-1)}{a} \rceil = k$

et $\lceil (M+1) \times \frac{a-1}{a} \rceil = \lceil (k + \lfloor \frac{k}{a-1} \rfloor + 1) \times \frac{a-1}{a} \rceil = \lceil (k + \frac{k}{a-1} - \frac{k \bmod (a-1)}{a-1} + 1) \times \frac{a-1}{a} \rceil = \lceil k - \frac{k \bmod (a-1)}{a} + \frac{a-1}{a} \rceil = k+1$. ■

Par le lemme 2.2, on a aussi $m = k + \lfloor \frac{k-1}{a-1} \rfloor = k + \lceil \frac{k-1-(a-2)}{a-1} \rceil = k + \lceil \frac{k}{a-1} \rceil - 1$, et $M = k + \lfloor \frac{k}{a-1} \rfloor = k + \lceil \frac{k-(a-2)}{a-1} \rceil$.

Ces parties entières sont assez courantes en combinatoire, par exemple $k \rightarrow \lceil k \times \frac{a-1}{a} \rceil$ correspond à un découpage récursif d'un ensemble de taille n où la plus grosse partie garde une certaine fraction des éléments de l'ensemble arrondie à l'entier supérieur. Ce découpage doit s'arrêter quand $n = a-1$. On peut alors compter le nombre d'étapes pour arriver à $a-1$, c'est-à-dire la profondeur de l'arbre de découpes. Si l'on veut

générer la suite des nombres d'étapes par ordre croissant des valeurs de n , la borne M ci-dessus est très utile. Voici un exemple de pseudo-code de générateur très efficace :

```
// Entree a ou a-1
b = a-1;
n = b;
M = b;
k = 0;
while(true){
    while(n <= M){
        yield k;
        ++n;
    }
    M += M/b;
    ++k;
}
/*
Exemple avec a = 3
n 2 3 4 5 6 7 8 9
M 2 3 4 6 6 9 9 9
k 0 1 2 3 3 4 4 4
*/
```

Le même raisonnement s'applique à un découpage récursif d'un ensemble de taille n où la plus grosse partie garde une certaine fraction des éléments de l'ensemble arrondie à l'entier inférieur. Ce découpage doit s'arrêter quand $n = 0$. Le pseudo-code de générateur est un petit peu moins efficace :

```
// Entree a ou a-1
b = a-1;
n = 0;
M = 0;
k = 0;
while(true){
    while(n <= M){
        yield k;
        ++n;
    }
    M += (M+b) / b;
    ++k;
}
/*
Exemple avec a = 3
n 0 1 2 3 4 5 6 7
M 0 1 2 4 4 7 7 7
k 0 1 2 3 3 4 4 4
*/
```

Les preuves des deux derniers lemmes permettent d'illustrer certaines des définitions. On peut les généraliser un peu plus. Soit $r \in \mathbb{R}, 0 < r < 1$. Soient $a, b \in \mathbb{N}, b < a$. Si $r = \frac{b}{a}$, $\frac{1-r}{r} = \frac{(1-\frac{b}{a}) \times a}{b} = \frac{\frac{a-b}{a} \times a}{b} = \frac{a-b}{b}$. Si $r = \frac{a-1}{a}$, $\frac{1-r}{r} = \frac{1}{a-1}$.

Si on considère des découpages récursifs donnés par une fonction $l \rightarrow \lfloor l \times r \rfloor$, on peut parler de découpage récursif inférieur de raison r (raison comme pour les séries géométriques, ça marche aussi en anglais sauf qu'on parle du *ratio* d'une *geometric series*). Un découpage récursif inférieur aboutit toujours à 0. Si on considère des découpages récursifs donnés par une fonction $l \rightarrow \lceil l \times r \rceil$, on peut parler de découpage récursif supérieur de raison r . Un découpage récursif supérieur boucle pour $n \times r > n - 1 \Leftrightarrow r > \frac{n-1}{n}$.

Lemme 2.5. Soient $k, l \in \mathbb{N}, r \in \mathbb{R}, 0 < r < 1$.

Si $m = k + \lceil \frac{k \times (1-r)}{r} \rceil$, $M = k + \lfloor \frac{k \times (1-r)}{r} \rfloor + \lceil \frac{1}{r} \rceil - 1$, $M' = k + \lceil \frac{k \times (1-r)}{r} \rceil + \lceil \frac{1}{r} \rceil - 1$, alors $\lfloor l \times r \rfloor = k \Rightarrow m \leq l \leq M'$ et $m \leq l \leq M \Rightarrow \lfloor l \times r \rfloor = k$.

Preuve :

$l \times r = k \Leftrightarrow l = k \times \frac{1}{r} \Leftrightarrow l = k + k \times (\frac{1}{r} - 1) \Leftrightarrow l = k + k \times \frac{1-r}{r}$, donc $l \times r \geq k \Leftrightarrow l \geq k \times \frac{1}{r} \Leftrightarrow l \geq k + k \times (\frac{1}{r} - 1) \Leftrightarrow l \geq k + k \times \frac{1-r}{r}$ car on ne multiplie pas par un nombre négatif. Soit $m = k + \lceil \frac{k \times (1-r)}{r} \rceil$.

On a $\lfloor m \times r \rfloor \geq \lfloor (k + k \times \frac{1-r}{r}) \times r \rfloor \geq \lfloor k \rfloor = k$

et $m = k + \lceil \frac{k \times (1-r)}{r} \rceil \Rightarrow m - 1 < k + \frac{k \times (1-r)}{r} \Rightarrow (m - 1) \times r < k \Rightarrow \lfloor (m - 1) \times r \rfloor < k$.

Soit $M = k + \lfloor \frac{k \times (1-r)}{r} \rfloor + \lceil \frac{1}{r} \rceil - 1$.

On a $\lfloor M \times r \rfloor \leq \lfloor (k + k \times \frac{1-r}{r} + \lceil \frac{1}{r} \rceil - 1) \times r \rfloor = \lfloor (k + k \times \frac{1-r}{r}) \times r + (\lceil \frac{1}{r} \rceil - 1) \times r \rfloor = \lfloor k + (\lceil \frac{1}{r} \rceil - 1) \times r \rfloor = k + \lfloor (\lceil \frac{1}{r} \rceil - 1) \times r \rfloor = k + \lfloor (\frac{1}{r} + \{\frac{1}{r}\}^{+c} - 1) \times r \rfloor = k + \lfloor 1 + (\{\frac{1}{r}\}^{+c} - 1) \times r \rfloor = k$ car $-1 \leq \{\frac{1}{r}\}^{+c} - 1 < 0 \Rightarrow -r \leq (\{\frac{1}{r}\}^{+c} - 1) \times r < 0 \Rightarrow \lfloor 1 + (\{\frac{1}{r}\}^{+c} - 1) \times r \rfloor = 0$ car $0 < r < 1$.

Réciproquement $M' = k + \lceil \frac{k \times (1-r)}{r} \rceil + \lceil \frac{1}{r} \rceil - 1 \Rightarrow M' + 1 = k + \frac{k \times (1-r)}{r} + \{\frac{k \times (1-r)}{r}\}^{+c} + \frac{1}{r} + \{\frac{1}{r}\}^{+c} \Rightarrow (M' + 1) \times r = k + 1 + (\{\frac{k \times (1-r)}{r}\}^{+c} + \{\frac{1}{r}\}^{+c}) \times r \Rightarrow \lfloor (M' + 1) \times r \rfloor > k$. ■

Notons que si $r = \frac{1}{a}$, $\frac{1-r}{r} = a - 1 \in \mathbb{N}$ implique que $M = M'$. Et notons que si $r = \frac{a-1}{a}$, on a $\frac{1-r}{r} = \frac{1}{a-1}$, $\lceil \frac{1}{r} \rceil = \lceil \frac{a}{a-1} \rceil = 2$ implique que $M = k + \lfloor \frac{k \times (1-r)}{r} \rfloor + \lceil \frac{1}{r} \rceil - 1 = k + \lfloor \frac{k}{a-1} \rfloor + 1 = k + \lfloor \frac{k+a-1}{a-1} \rfloor = k + \lceil \frac{k+1}{a-1} \rceil$, la borne que nous connaissons déjà et que donc M' est inutile dans ce cas.

Aucune des deux bornes M ou M' ne peut remplacer l'autre. Exemples avec $r =$

$\frac{3}{5}, \frac{1-r}{r} = \frac{2}{3}, M = k + \lfloor \frac{k \times (1-r)}{r} \rfloor + \lceil \frac{1}{r} \rceil - 1 = k + \lfloor \frac{k \times 2}{3} \rfloor + \lceil \frac{5}{3} \rceil - 1 = k + \lfloor \frac{k \times 2}{3} \rfloor + 1,$
 $M' = k + \lceil \frac{k \times 2}{3} \rceil + 1.$ Si $k = 0, M = 0 + \lfloor 0 \rfloor + 1 = 1$ et $M' = 0 + \lceil 0 \rceil + 1 = 1, M = M'.$
Si $k = 1, M = 1 + \lfloor \frac{2}{3} \rfloor + 1 = 2$ et $M' = 1 + \lceil \frac{2}{3} \rceil + 1 = 3, \lfloor M' \times \frac{3}{5} \rfloor = \lfloor 3 \times \frac{3}{5} \rfloor = 1 = k.$
Si $k = 2, M = 2 + \lfloor \frac{4}{3} \rfloor + 1 = 4$ et $M' = 2 + \lceil \frac{4}{3} \rceil + 1 = 5, \lfloor M' \times \frac{3}{5} \rfloor = \lfloor 5 \times \frac{3}{5} \rfloor = 3 > k.$

Lemme 2.6. Soient $k, l \in \mathbb{N}, r \in \mathbb{R}, 0 < r < 1.$

Si $m = k + \lceil \frac{k \times (1-r)}{r} \rceil - \lceil \frac{1}{r} \rceil + 1, m' = k + \lfloor \frac{k \times (1-r)}{r} \rfloor - \lceil \frac{1}{r} \rceil + 1, M = k + \lfloor \frac{k \times (1-r)}{r} \rfloor,$
alors $\lfloor l \times r \rfloor = k \Rightarrow m' \leq l \leq M$ et $m \leq l \leq M \Rightarrow \lfloor l \times r \rfloor = k.$

Preuve :

$l \times r = k \Leftrightarrow l = k \times \frac{1}{r} \Leftrightarrow l = k + k \times (\frac{1}{r} - 1) \Leftrightarrow l = k + k \times \frac{1-r}{r},$ donc
 $l \times r \leq k \Leftrightarrow l \leq k \times \frac{1}{r} \Leftrightarrow l \leq k + k \times (\frac{1}{r} - 1) \Leftrightarrow l \leq k + k \times \frac{1-r}{r}$ car on ne multiplie pas par un nombre négatif. Soit $M = k + \lfloor \frac{k \times (1-r)}{r} \rfloor.$

On a $\lceil M \times r \rceil \leq \lceil (k + k \times \frac{1-r}{r}) \times r \rceil \leq \lceil k \rceil = k$

et $M = k + \lfloor \frac{k \times (1-r)}{r} \rfloor \Rightarrow M + 1 > k + \frac{k \times (1-r)}{r} \Rightarrow M + 1 \times r > k \Rightarrow \lceil (M + 1) \times r \rceil > k.$

Soit $m = k + \lceil \frac{k \times (1-r)}{r} \rceil - \lceil \frac{1}{r} \rceil + 1.$

On a $\lceil m \times r \rceil \geq \lceil (k + k \times \frac{1-r}{r} - \lceil \frac{1}{r} \rceil + 1) \times r \rceil = \lceil (k + k \times \frac{1-r}{r}) \times r + (-\lceil \frac{1}{r} \rceil + 1) \times r \rceil = \lceil k + (-\lceil \frac{1}{r} \rceil + 1) \times r \rceil = k + \lceil (-\lceil \frac{1}{r} \rceil + 1) \times r \rceil = k + \lceil (-\frac{1}{r} - \{\frac{1}{r}\}^{+c} + 1) \times r \rceil = k + \lceil -1 + (1 - \{\frac{1}{r}\}^{+c}) \times r \rceil = k$ car $0 < 1 - \{\frac{1}{r}\}^{+c} \leq 1 \Rightarrow 0 < (1 - \{\frac{1}{r}\}^{+c}) \times r \leq r \Rightarrow \lceil -1 + (1 - \{\frac{1}{r}\}^{+c}) \times r \rceil = 0$ car $0 < r < 1.$

Réciproquement $m' = k + \lfloor \frac{k \times (1-r)}{r} \rfloor - \lceil \frac{1}{r} \rceil + 1 \Rightarrow m' - 1 = k + \frac{k \times (1-r)}{r} - \{\frac{k \times (1-r)}{r}\} - \frac{1}{r} - \{\frac{1}{r}\}^{+c} \Rightarrow (m' - 1) \times r = k - 1 - (\{\frac{k \times (1-r)}{r}\} + \{\frac{1}{r}\}^{+c}) \times r \Rightarrow \lceil (m' - 1) \times r \rceil < k.$ ■

À nouveau, notons que si $r = \frac{1}{a}, \frac{1-r}{r} = a - 1 \in \mathbb{N}$ implique que $M = M'.$ Et notons que si $r = \frac{a-1}{a},$ on a $\frac{1-r}{r} = \frac{1}{a-1}, \lceil \frac{1}{r} \rceil = \lceil \frac{a}{a-1} \rceil = 2$ implique que $m = k + \lceil \frac{k \times (1-r)}{r} \rceil - \lceil \frac{1}{r} \rceil + 1 = k + \lceil \frac{k}{a-1} \rceil - 1 = k + \lceil \frac{k-a+1}{a-1} \rceil = k + \lfloor \frac{k-1}{a-1} \rfloor,$ la borne que nous connaissons déjà et que donc m' est inutile dans ce cas.

Aucune des deux bornes m ou m' ne peut remplacer l'autre. Exemples avec $r = \frac{3}{5}, \frac{1-r}{r} = \frac{2}{3}, m = k + \lceil \frac{k \times (1-r)}{r} \rceil - \lceil \frac{1}{r} \rceil + 1 = k + \lceil \frac{k \times 2}{3} \rceil - \lceil \frac{5}{3} \rceil + 1 = k + \lceil \frac{k \times 2}{3} \rceil - 1,$
 $m' = k + \lfloor \frac{k \times 2}{3} \rfloor - 1.$ Si $k = 2 (\frac{2}{3} > \frac{3}{5} > \frac{1}{2}), m = 2 + \lceil \frac{6}{3} \rceil - 1 = 3$ et $m' =$

$2 + \lfloor \frac{6}{5} \rfloor - 1 = 2$, $\lceil m' \times \frac{3}{5} \rceil = \lceil 2 \times \frac{3}{5} \rceil = 2 = k$. Si $k = 3$, $m = 3 + \lceil \frac{9}{5} \rceil - 1 = 4$ et
 $m' = 3 + \lfloor \frac{9}{5} \rfloor - 1 = 3$, $\lceil m' \times \frac{3}{5} \rceil = \lceil 3 \times \frac{3}{5} \rceil = 2 < k$. Si $k = 4$, $m = 4 + \lceil \frac{12}{5} \rceil - 1 = 6$ et
 $m' = 4 + \lfloor \frac{12}{5} \rfloor - 1 = 5$, $\lceil m' \times \frac{3}{5} \rceil = \lceil 5 \times \frac{3}{5} \rceil = 3 < k$. Si $k = 5$, $m = 5 + \lceil \frac{15}{5} \rceil - 1 = 7$
 et $m' = 5 + \lfloor \frac{15}{5} \rfloor - 1 = 7$, $m = m'$.

3 Notes historiques, abus de modération à l'OEIS

Sur un sujet proche, j'ai fait des ajouts à l'OEIS pendant un peu moins de 10 jours (depuis le 26 novembre 2025), et notamment la suite A061420. J'ai aussi proposé deux nouvelles séquences liées à A061420 et mon article Lyaudet (2025b), qui avaient reçues les numéros A391044 et A391108. Au début, je pensais qu'ils seraient contents de mes ajouts, mais j'ai assez vite compris qu'ils jouaient le pourrissement de mes propositions d'ajouts avec des commentaires contradictoires, ou des manœuvres de sadiques ordinaires qui cherchent à « castrer les autres ». C'était une des choses que mon père avait retenues de sa psychanalyse et qu'ils m'avaient apprises : repérer ceux qui cherchent à te couper dans ton élan, te voler tes ailes, ou plus vulgairement te “les” couper. J'ai gentiment fait les modifications, trouvé des solutions, la situation semblait s'améliorer car tout était réglé sur la discussion de A391044. Donc j'attendais juste qu'un éditeur “plus gradé” valide et publie la suite A391044, mais deux jours après la fin des modifications un éditeur “plus gradé” a “recyclé” A391044, selon lui à cause de https://oeis.org/wiki/%22War_and_Peace%22_submissions. Sauf que la page “War and peace” parle d'un délai d'un mois minimum et que la censure n'est intervenue que 8 jours après mon ajout de cette suite dans l'OEIS, que sur A391044 tout était réglé et que les échanges n'étaient pas si nombreux que ça, un “léger” abus de pouvoir... Du coup, quand ils ont recommencé le même cirque sur A391108, alors qu'il n'y avait que 2 échanges vu que j'avais appris des corrections sur A391044 leurs types d'attentes, je leur ai “gentiment” demandé s'ils étaient des espions ou des receleurs d'espions qui écoutent ceux qui me persécutent depuis 20 ans. (Mes sauvegardes de mon site dans la Wayback Machine entre septembre et le 3 décembre ont disparues le 5 décembre, par exemple. Il ne reste plus que celles qui datent d'avant septembre. Je les ai contactés pour savoir si c'était juste un bug et si les sauvegardes étaient toujours là, mais je n'ai pas eu de réponse.) Après, ce ne sont peut-être que des petits sadiques qui abusent de leur pouvoir, voire des voleurs qui dégoûtent les gens avant de leur voler leurs idées et de les publier, ou bien une persécution ciblée de plus. Mais clairement, ils n'ont pas le souci de la Science libre en premier. Sur tous les sites ouverts du web, on trouve ce genre de phénomènes de “bullying” avec des gens qui jouent le pourrissement ou la montre sur ce que les autres proposent. Comme je leur ai dit : « Si vous servez la science, vous pouvez corriger et améliorer mes propositions d'ajouts, mais pas les censurer. ». Pour que vous puissiez juger sur pièce de quoi je parle, voici mes 3 propositions d'ajout (la seule en cours, c'est la A391108 mais ils ont repris le travail de pourrissement et de mauvaise foi, donc c'est une question d'heures ou de jours avant qu'elle soit rejetée).

Pour ce premier extrait, je ne mets que mes ajouts :

A061420

COMMENTS From Laurent Lyaudet, Nov 27 2025: (Start)
a(n-2) is the number of steps to go from n to 2 under
the map $g: x \rightarrow \text{ceiling}(x*2/3)$.
a(n-2) = L(n) or L(n)+1 where L(n) =
ceiling(log(n/2)/log(3/2)),
and those n-2 in A391108 are the former case,
those n-2 in A391044 are the latter case.
(For an integer k, ceiling(k/2) = floor((k+1)/2).)
For an integer k, m = k + floor((k-1)/2) is the smallest
integer such that g(m) = k.
For an integer k, M = k + floor(k/2) is the largest integer
such that g(M) = k.
If h: x -> ceiling((x-1)*2/3) is the map in the definition of
A061420 or f: x -> floor(x*2/3) in Benoit Cloitre's comment
(note that f != h, but f(k) = h(k) for any integer k)
and k is an integer:
m = k + floor((k+1)/2) is the smallest integer such that
h(m) = k and/or f(m) = k.
M = k + floor(k/2) + 1 is the largest integer such that
h(M) = k and/or f(M) = k
(see PHP program for an application).(End)

PROG (PHP)
<?php
// See 3rd paragraph in COMMENTS, in particular:
// "M = k + floor(k/2) + 1 is the largest integer such that h(M) = k".
// This program is very fast and uses constant memory
// (4 64 bits signed integers), apart from output,
// since it doesn't require to keep previous terms,
// and is limited to integers less than 2^64.
// Inputs:
\$nMax = 2000;
// Outputs to std output the b-file.
echo("0 0\n1 1\n2 2\n");
\$n = 3;
\$b = 4;
\$k = 3;
while(true){
 while(\$n <= \$b){
 echo("\$n \$k\n");
 ++\$n;
 }
 \$b += intdiv(\$b, 2) + 1;
 ++\$k;
 if(\$b > \$nMax){


```

        $b = $nMax;
        break;
    }
}
while($n <= $b){
    echo("$n $k\n");
    ++$n;
}
// Laurent Lyaudet, Dec 01 2025
?>

```

CROSSREFS Cf. A391044, A391108.

Précédemment, ils avaient interdit :

$a_2(m) = a_2(\text{ceiling}(m*2/3)) + 1$ with $a_2(2) = 0$ and offset 2 is simpler and equivalent through the change of variable $m = n + 2$ and may seem more natural in some combinatorial context:
 Start with n elements, keep only $\text{ceiling}(n*2/3)$ of those, repeat until you reach 2, where $\text{ceiling}(2*2/3) = 2$ loops.
 From A391044, let $L(n) = \text{ceiling}(\log(n/2)/\log(3/2))$, $a(n-2) = L(n) + 1$ if n is in A391044, $a(n-2) = L(n)$ otherwise,
 Laurent Lyaudet, Nov 27 2025

et ils m'avaient demandé de simplifier le programme qui était :

```

<?php
// See 3rd paragraph in COMMENTS, in particular:
// "M = k + floor(k/2) + 1 is the largest integer such that h(M) = k".
// This program is very fast and uses constant memory
// (4 64 bits signed integers and a boolean), apart from output,
// since it doesn't require to keep previous terms,
// and is limited to integers less than 2^64.
// Inputs:
$bFile = true;
$nMax = 2000;
// Outputs to std output:
// - the comma separated sequence if $bFile === false,
// - the b-file if $bFile === true.
if($bFile){ echo("0 0\n1 1\n2 2\n"); }else{ echo("0, 1, 2, "); }
$n = 3;
$b = 4;
$k = 3;
while(true){
    while($n <= $b){
        if($bFile){ echo("$n $k\n"); }else{ echo("$k, "); }
    }
}

```

```

        ++$n;
    }
    $b += intdiv($b, 2) + 1;
    ++$k;
    if($b > $nMax){
        $b = $nMax;
        break;
    }
}
while($n <= $b){
    if($bFile){ echo("$n $k\n"); }else{ echo("$k, "); }
    ++$n;
}
// Laurent Lyaudet, Dec 01 2025
?>

```

Là encore, leur demande de simplifier le programme en enlevant le paramètre \$bFile n'avait aucun intérêt. La complexité des deux variantes est du même ordre. Les programmes existants sur A061420 sont moins efficaces, car ils doivent garder tous les termes précédents. Ils ont décidé de tout virer d'un coup : "hop, rien à garder dans le travail des autres".

Ci-dessous, ma première proposition de suite, le nom a été modifié par un éditeur, et il est moins clair que ce que j'ai fait pour la deuxième proposition de suite.

```

A391044
NAME Numbers k >= 2 for which the number of steps x -> ceiling(x*2/3)
    to reach 2, being S(k) = A061420 (n-2) many,
    is S(k) = L(k)+1 where L(k) = ceiling(log(k/2)/log(3/2)).
DATA 10, 14, 15, 20, 21, 22, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 43, 44, 45, 46,
    47, 48, 49, 50, 51, 64, 65, 66, 67, 68, 69, 70, 71, 72, 73, 74,
    75, 76, 95, 96, 97, 98, 99, 100, 101, 102, 103, 104, 105, 106,
    107, 108, 109, 110, 111, 112, 113, 114, 115, 142, 143, 144, 145,
    146, 147, 148, 149, 150
OFFSET 1,1
COMMENTS The number of steps is either S(k) = L(k) or S(k) = L(k) + 1
    and this sequence is the latter.
    S(k) = L(k) is A391108.
    Empirical observation, but without proof yet,
    shows that terms are all and only
    A003312(i+1) <= k <= A147788(i) for i >= 4
    (noting that the steps in A003312 yield the smallest integer
    m such that ceiling(2m/3) = k).
LINKS Laurent Lyaudet, <a href="/A391044/b391044_1.txt">Table of n,
    a(n) for n = 1..10000</a>
    Laurent Lyaudet, <a href="https://lyaudet.eu/laurent/Publi/
    Journaux/LL2025LAQNonBijective/
    LL2025LAQNonBijective_en_v4.pdf">

```

On non-bijective tree-questionable-width
 Laurent Lyaudet,
 PHP program to generate the sequence or the b-file
 EXAMPLE $k = 2$ is not a term since $\text{ceiling}(2 \cdot 2/3) = 2$, it loops,
 and $\text{ceiling}(\log(2/2)/\log(3/2)) = 0$.
 $k = 3$ is not a term since $\text{ceiling}(2 \cdot 3/3) = 2$, 1 step,
 and $\text{ceiling}(\log(3/2)/\log(3/2)) = 1$.
 $k = 4$ is not a term since $\text{ceiling}(2 \cdot 4/3) = 3$, 2 steps,
 and $\text{ceiling}(\log(4/2)/\log(3/2)) = 2$.
 ...
 $k = 10$ is the first term since $\text{ceiling}(2 \cdot 10/3) = 7$,
 $\text{ceiling}(2 \cdot 7/3) = 5$, $\text{ceiling}(2 \cdot 5/3) = 4$, hence 5 steps,
 and $\text{ceiling}(\log(10/2)/\log(3/2)) = 4$,
 thus we need to add 1 to have the number of steps
 (10 is the smallest such number).
 PROG (PHP) // See Lyaudet link.
 CROSSREFS Cf. A003312, A061420, A147788, A391108.
 KEYWORD nonn, changed
 AUTHOR Laurent Lyaudet, Nov 26 2025

Ils ont demandé à ce que je remplace $\ln$ par $\log$, alors que https://oeis.org/wiki/Style_Sheet dit explicitement que l'on peut utiliser l'un ou l'autre sans que ce soit gênant.

J'avais mis le programme dans un fichier "/A391044/a391044.php.txt" téléversé à part. C'est OEIS qui a rajouté .txt après .php, *a priori* pour éviter que le programme soit exécuté sur le serveur au lieu d'être téléchargé.

```
<?php
/*
  _Laurent Lyaudet_, Nov 29 2025
  If this program halts without error message,
  then the output is correct.
*/
$aSteps = [2 => 0, 3 => 1];
// Outputs to std output:
// - the comma separated sequence if $bFile === false,
// - the b-file if $bFile === true.
$bFile = true;
$fThreeHalves = 3 / 2;
$iFound = 0;
$iMaxFound = 10000;
for($k = 4; $iFound < $iMaxFound; ++$k){
  if($k >= 2**53){
    exit("You may not have enough precision.");
  }
  if($k >= 2**62 - 2){
    exit("Signed integer overflow for the computations below.");
  }
}
```

```

}
// $iPreviousRank = (int) ceil($k*2/3)
$iPreviousRank = intdiv($k*2 + 2, 3);
$iSteps = 1 + $aSteps[$iPreviousRank];
/* IEEE 754 64-bit double : 53 bits of precision for $k
Rule of thumb:
- we lose at most one bit of precision for each +,-,*,/
- since we never have any double near the subnormals,
  an ULP less than 1 yields less than 1 bit of precision lost
>= 52 bits of precision for $k/2 and $fThreeHalves
PHP log uses C log function log($k/2)/log($fThreeHalves)
https://homepages.loria.fr/PZimmermann/papers/glibc240.pdf
shows that log functions in various variants of libc have known
errors that are less than 1ULP.
But the exact result is not always exact for double precision,
whilst exhaustive search is possible for single precision.
For the particular case of glibc:
-----
Worst case error if |y| > 0x1p-4: 0.519 ULP (0.520 ULP without fma).
0.5 + 2.06/N + abs-poly-error*2^56 ULP (+ 0.001 ULP without fma).
-> return y;
So 0x1p-4 = 0.0625 and $k/2 >= 2, log(2) ~= 0.693147181 > 0.0625
$fThreeHalves = 1.5, log(1.5) ~= 0.405465108 > 0.0625
Thus, we are in the case, where we lose less than 0.520 ULP,
wich is less than 1 bit of precision.
-----
Otherwise, we take a big margin of 10 bits of precision lost in case
the implementation of log has large ULPs.
So we may assume that the log has at least 41 bits of precision.
*/
$fLog = log($k/2, $fThreeHalves);
$iCeil = (int) ceil($fLog);
// Both differences below are less than 1, so no bit of precision
// is for the integer part.
// We take again a big margin of 5 bits of precision lost.
if(
    ($iCeil - $fLog) < 1/(2**35)
    || ($fLog - ($iCeil - 1)) < 1/(2**35)
){
    exit(
        "For k = $k, Log is too close from an integer"
        ." to be certain there is no precision error."
    );
}
$iBound = 1 + $iCeil;
$aSteps[$k] = $iSteps;

```

```

if($iSteps === $iBound){
    ++$iFound;
    if($bFile){
        echo "$iFound $k\n";
    }
    else{
        echo "$k, ";
    }
}
}
?>

```

Voici ma deuxième proposition de suite qui sera sans doute bientôt rejetée par les éditeurs :

```

A391108
NAME Numbers k >= 2 for which the number of steps x -> ceiling(x*2/3)
to reach 2 is S(k) = L(k)
where L(k) = ceiling(log(k/2)/log(3/2)).
DATA 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 11, 12, 13, 16, 17, 18, 19, 23, 24, 25,
26, 27, 28, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 52, 53, 54, 55, 56,
57, 58, 59, 60, 61, 62, 63, 77, 78, 79, 80, 81, 82, 83, 84, 85,
86, 87, 88, 89, 90, 91, 92, 93, 94, 116, 117, 118, 119, 120, 121,
122, 123, 124, 125, 126
OFFSET 1,1
COMMENTS The number of steps is S(k) = A061420(k-2).
S(k) is either S(k) = L(k) or S(k) = L(k) + 1
and this sequence is the former.
S(k) = L(k) + 1 is A391044.
Empirical observation, but without proof yet,
shows that terms are all and only
k in {2,3,4,5,6,7,8,9} or
A147788(i) < k < A003312(i+1) for i >= 5
(noting that the steps in A003312 yield the smallest integer
m such that ceiling(2m/3) = k).
LINKS Laurent Lyaudet, <a href="/A391108/b391108_1.txt">Table of n,
a(n) for n = 1..10000</a>
Laurent Lyaudet, <a href="https://lyaudet.eu/laurent/Publi/
Journaux/LL2025LAQNonBijective/
LL2025LAQNonBijective_en_v4.pdf">
On non-bijective tree-questionable-width</a>
Laurent Lyaudet, <a href="/A391108/a391108.php.txt">
PHP program to generate the sequence or the b-file</a>
EXAMPLE k = 2 is a term since ceiling(2*2/3) = 2, it loops,
and ceiling(log(2/2)/log(3/2)) = 0.
k = 3 is a term since ceiling(2*3/3) = 2, 1 step,
and ceiling(log(3/2)/log(3/2)) = 1.

```

$k = 4$ is a term since $\text{ceiling}(2 \cdot 4/3) = 3$, 2 steps,
 and $\text{ceiling}(\log(4/2)/\log(3/2)) = 2$.
 ...
 $k = 10$ is not a term since $\text{ceiling}(2 \cdot 10/3) = 7$,
 $\text{ceiling}(2 \cdot 7/3) = 5$, $\text{ceiling}(2 \cdot 5/3) = 4$, hence 5 steps,
 and $\text{ceiling}(\log(10/2)/\log(3/2)) = 4$,
 thus we need to add 1 to have the number of steps
 (10 is the smallest such number).
 PROG (PHP) // See Lyaudet link.
 CROSSREFS Cf. A003312, A061420, A147788, A391044.
 KEYWORD nonn, changed
 AUTHOR Laurent Lyaudet, Nov 29 2025

Et voici le programme téléversé :

```

<?php
/*
  _Laurent Lyaudet_, Nov 29 2025
  If this program halts without error message,
  then the output is correct.
*/
$aSteps = [2 => 0, 3 => 1];
// Outputs to std output:
// - the comma separated sequence if $bFile == false,
// - the b-file if $bFile == true.
$bFile = true;
if($bFile){
  echo "1 2\n2 3\n";
}
else{
  echo "2, 3, ";
}
$fThreeHalves = 3 / 2;
$iFound = 2;
$iMaxFound = 10000;
for($k = 4; $iFound < $iMaxFound; ++$k){
  if($k >= 2**53){
    exit("You may not have enough precision.");
  }
  if($k >= 2**62 - 2){
    exit("Signed integer overflow for the computations below.");
  }
  // $iPreviousRank = (int) ceil($k*2/3)
  $iPreviousRank = intdiv($k*2 + 2, 3);
  $iSteps = 1 + $aSteps[$iPreviousRank];
  /* IEEE 754 64-bit double : 53 bits of precision for $k
  Rule of thumb:

```

- we lose at most one bit of precision for each +,-,*,/
 - since we never have any double near the subnormals,
 an ULP less than 1 yields less than 1 bit of precision lost
 >= 52 bits of precision for \$k/2 and \$fThreeHalves
 PHP log uses C log function $\log(\$k/2)/\log(\$fThreeHalves)$
<https://homepages.loria.fr/PZimmermann/papers/glibc240.pdf>
 shows that log functions in various variants of libc have known
 errors that are less than 1ULP.
 But the exact result is not always exact for double precision,
 whilst exhaustive search is possible for single precision.
 For the particular case of glibc:

```
Worst case error if |y| > 0x1p-4: 0.519 ULP (0.520 ULP without fma).
0.5 + 2.06/N + abs-poly-error*2^56 ULP (+ 0.001 ULP without fma).
-> return y;
So 0x1p-4 = 0.0625 and $k/2 >= 2, log(2) ~= 0.693147181 > 0.0625
$fThreeHalves = 1.5, log(1.5) ~= 0.405465108 > 0.0625
Thus, we are in the case, where we lose less than 0.520 ULP,
wich is less than 1 bit of precision.
```

Otherwise, we take a big margin of 10 bits of precision lost in case
 the implementation of log has large ULPs.

So we may assume that the log has at least 41 bits of precision.

```
*/
$fLog = log($k/2, $fThreeHalves);
$iCeil = (int) ceil($fLog);
// Both differences below are less than 1, so no bit of precision
// is for the integer part.
// We take again a big margin of 5 bits of precision lost.
if(
  ($iCeil - $fLog) < 1/(2**35)
  || ($fLog - ($iCeil - 1)) < 1/(2**35)
){
  exit(
    "For k = $k, Log is too close from an integer"
    ." to be certain there is no precision error."
  );
}
$iBound = $iCeil;
$aSteps[$k] = $iSteps;
if($iSteps === $iBound){
  ++$iFound;
  if($bFile){
    echo "$iFound $k\n";
  }
}
else{
```

```

        echo "$k, ";
    }
}
}
?>

```

Merci Dieu ! Merci Père ! Merci Jésus ! Merci Saint-Esprit !

Références

R. L. Graham, D. E. Knuth, and O. Patashnik. *Concrete Mathematics : A Foundation for Computer Science*. Addison-Wesley, Reading, 1989.

L. Lyaudet. On non-bijective tree-questionable-width. *preprint*, abs/202506-4, 2025a. URL https://lyaudet.eu/laurent/Publi/Journaux/LL2025LAQNonBijective/LL2025LAQNonBijective_en_v4.pdf.

L. Lyaudet. Sur la largeur arborescente questionnable non-bijective. *preprint*, abs/202506-3, 2025b. URL https://lyaudet.eu/laurent/Publi/Journaux/LL2025LAQNonBijective/LL2025LAQNonBijective_fr_v4.pdf.

OEIS Foundation Inc. (2025). Entry A061420 in The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences. URL <https://oeis.org/A061420>.

Archive

FR V1 2025/12/03 :

https://lyaudet.eu/laurent/Publi/Journaux/LL2025LPP/LL2025LPP_fr_v1.pdf

EN V1 2025/12/03 :

https://lyaudet.eu/laurent/Publi/Journaux/LL2025LPP/LL2025LPP_en_v1.pdf

FR V2 2025/12/07 cette version :

https://lyaudet.eu/laurent/Publi/Journaux/LL2025LPP/LL2025LPP_fr_v2.pdf

EN V2 2025/12/07 :

https://lyaudet.eu/laurent/Publi/Journaux/LL2025LPP/LL2025LPP_en_v2.pdf