Quelles notions de convergence sont possibles en mathématiques ?

Laurent Lyaudet*

9 mai 2026

Résumé

Le but de cette note est de faire une étude exhaustive des possibilités de définitions de convergence de suites de fonctions. Clairement, quelqu'un a déjà dû le faire avant. Mais il est possible que personne n'ait pris la peine de le publier.

Version initiale : 2026/05/08 Version courante : 2026/05/09

Mots-clés : convergence simple, convergence uniforme, pointwise convergence, uniform convergence, critère de Cauchy, critère de Cauchy uniforme, pointwise Cauchy, uniformly Cauchy.

1 Rappels

Nous commençons par quelques extraits de pages Wikipédia (voir Wikipedia (2026a), Wikipedia (2026b), Wikipedia (2026c), Wikipedia (2026d)).

Soient X un ensemble, (Y, d) un espace métrique, et A un sous-ensemble de X. Soient $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur X et à valeurs dans Y, et f une fonction définie sur X à valeurs dans Y.

Convergence simple sur A :
$\forall x \in A, \forall \varepsilon > 0, \exists N_{\varepsilon,x} \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N_{\varepsilon,x} \Rightarrow d(f_n(x), f(x)) \leq \varepsilon$.

Convergence uniforme sur A :
$\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N_\varepsilon \Rightarrow (\forall x \in A, d(f_n(x), f(x)) \leq \varepsilon)$.

2 Quelles sont les autres définitions possibles ?

Hypothèse simplificatrice 1 : $\forall \varepsilon > 0$
On définit la convergence par l'objectif $d(f_n(x), f(x)) \leq \varepsilon$ qui est quantifié par la variable ε que l'on veut aussi petite que possible. Donc d'un point de vue logique, on veut que la formule soit vraie $\forall \varepsilon > 0$. C'est la seule traduction avec les briques de base du formalisme logique d'un écart aussi petit que l'on souhaite.

*`https://lyaudet.eu/laurent/`, laurent.lyaudet@gmail.com

Cet objectif exclut la définition de convergence de Cauchy comme possibilité de formulation, mais on y reviendra plus tard.

Hypothèse simplificatrice 2 : $\forall x \in A$

On veut que ça converge sur tout A, donc $\forall x \in A, d(f_n(x), f(x)) \leq \varepsilon$. En effet, pas la peine d'avoir $\forall x \notin EnsembleDeMesureNulle$ pour des applications à de l'intégration par exemple. Il suffit de définir correctement le $A \subseteq X$ avant de se poser la question de la convergence.

Hypothèse simplificatrice 3 : $\exists m \in \mathbb{N}, n \geq m \Rightarrow$

On veut que l'objectif de convergence soit toujours atteint à partir d'un certain rang, pas une fois sur deux, pas juste de temps en temps, pas juste une infinité de fois.

Hypothèse simplificatrice 3' : $\forall n \in \mathbb{N}$

Sans contrainte, cela reviendrait à $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in A, f_n(x) = f(x)$, car toutes les fonctions f_n seraient infiniment proches de $f(x)$, donc égales. En particulier, $\forall n \in \mathbb{N}$ devient implicite. On peut toujours le dire juste avant $n \geq m$.

Donc les choix possibles sont

$$@\text{Quantificateurs1}@, \forall n \in \mathbb{N}, \qquad n \geq m \Rightarrow @\text{Quantificateurs2}@, d(f_n(x), f(x)) \leq \varepsilon.$$

Rappelons que

$$\begin{aligned}
&@\text{Quantificateurs1}@, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq m \Rightarrow @\text{Quantificateurs2}@, d(f_n(x), f(x)) \leq \varepsilon \\
\Leftrightarrow\ &@\text{Quantificateurs1}@, \forall n \in \mathbb{N}, \neg(n \geq m) \vee (@\text{Quantificateurs2}@, d(f_n(x), f(x)) \leq \varepsilon) \\
\Leftrightarrow\ &@\text{Quantificateurs1}@, @\text{Quantificateurs2}@, \forall n \in \mathbb{N}, \neg(n \geq m) \vee d(f_n(x), f(x)) \leq \varepsilon \\
\Leftrightarrow\ &@\text{Quantificateurs1}@, @\text{Quantificateurs2}@, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq m \Rightarrow d(f_n(x), f(x)) \leq \varepsilon \\
\Leftrightarrow\ &@\text{Quantificateurs}@, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq m \Rightarrow d(f_n(x), f(x)) \leq \varepsilon.
\end{aligned}$$

Les variables avec quantificateurs sont à choisir parmi :

- $\forall \varepsilon > 0$,
- $\forall x \in A$,
- $\exists m \in \mathbb{N}$.

Et les règles de la logique font que choisir $\forall \varepsilon > 0, \forall x \in A$ ou $\forall x \in A, \forall \varepsilon > 0$, c'est équivalent. Donc @Quantificateurs@ a 4 choix possibles :

- $\forall \varepsilon > 0, \forall x \in A, \exists m \in \mathbb{N}$,
- $\exists m \in \mathbb{N}, \forall \varepsilon > 0, \forall x \in A$,
- $\forall \varepsilon > 0, \exists m \in \mathbb{N}, \forall x \in A$,
- $\forall x \in A, \exists m \in \mathbb{N}, \forall \varepsilon > 0$.

Ce qui donne :

- $\forall \varepsilon > 0, \forall x \in A, \exists m \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq m \Rightarrow d(f_n(x), f(x)) \leq \varepsilon$, c'est la convergence simple,
- $\exists m \in \mathbb{N}, \forall \varepsilon > 0, \forall x \in A, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq m \Rightarrow d(f_n(x), f(x)) \leq \varepsilon$, c'est la supra-convergence uniforme, supra-convergence signifiant qu'à partir d'un certain rang, on a carrément l'égalité avec la limite,
- $\forall \varepsilon > 0, \exists m \in \mathbb{N}, \forall x \in A, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq m \Rightarrow d(f_n(x), f(x)) \leq \varepsilon$, c'est la convergence uniforme,
- $\forall x \in A, \exists m \in \mathbb{N}, \forall \varepsilon > 0, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq m \Rightarrow d(f_n(x), f(x)) \leq \varepsilon$, c'est la supra-convergence simple.

Avec nos hypothèses simplificatrices, il n'y a que 4 définitions de convergence :

— convergence simple (C.S.),
— convergence uniforme (C.U.),
— supra-convergence simple (S.C.S.),
— supra-convergence uniforme (S.C.U.).

(Supra-convergence = égalité à partir d'un certain rang.)

Définition 2.1 *Soient X un ensemble, (Y, d) un espace métrique, et A un sous-ensemble de X. Soient $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur X et à valeurs dans Y, et f une fonction définie sur X à valeurs dans Y.*

Convergence Simple (C.S.) *On dit que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers f sur A si : $\forall\varepsilon > 0, \forall x \in A, \exists m \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq m \Rightarrow d(f_n(x), f(x)) \leq \varepsilon$,*

Convergence Uniforme (C.U.) *On dit que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur A si : $\forall\varepsilon > 0, \exists m \in \mathbb{N}, \forall x \in A, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq m \Rightarrow d(f_n(x), f(x)) \leq \varepsilon$,*

Supra-Convergence Simple (S.C.S.) *On dit que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ supra-converge simplement vers f sur A si : $\forall x \in A, \exists m \in \mathbb{N}, \forall\varepsilon > 0, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq m \Rightarrow d(f_n(x), f(x)) \leq \varepsilon$,*

Supra-Convergence Uniforme (S.C.U.) *On dit que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ supra-converge uniformément vers f sur A si : $\exists m \in \mathbb{N}, \forall\varepsilon > 0, \forall x \in A, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq m \Rightarrow d(f_n(x), f(x)) \leq \varepsilon$.*

Théorème 2.2

— *La convergence uniforme implique la convergence simple.*
— *La supra-convergence uniforme implique la supra-convergence simple.*
— *La supra-convergence simple implique la convergence simple.*
— *La supra-convergence uniforme implique la convergence uniforme.*

On a ce diagramme de relations entre les 4, où le haut implique le bas.

```
   S.C.U.
  /    \
 /      \
C.U.     S.C.S.
 \      /
  \    /
   C.S.
```

Et on voit que C.U. et S.C.S. sont indépendants.

Contre-exemple 2.3 *Soient $f_n(x) = \frac{1}{n}$ et $f(x) = 0$. (Oui, on n'utilise pas x, ce sont des fonctions constantes.) On a la convergence uniforme de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers f. Mais on n'a jamais $f_n(x) = f(x)$ pour aucun n, donc on n'a pas la supra-convergence simple.*

Contre-exemple 2.4 *$X = A = \mathbb{N}$. Soit $f(x)$ quelconque. Soient $f_n(x)$ tels que : $f_x(x) = f(x)$, idem pour $n \geq x, f_n(x) = f(x)$, $f_y(x) = f(x) - y$ pour $y < x$. (Hé oui, au début on s'éloigne, c'est l'avantage des contre-exemples, on peut être créatif :).). On a bien la supra-convergence simple mais pas la convergence uniforme de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers f. Car $\forall \varepsilon > 0$, il existe un $m \in \mathbb{N}$, tel que $\varepsilon < m$, donc en particulier pas de convergence uniforme à cause de $f(m+1)$.*

On peut même voir que l'on a le résultat suivant qui est un peu moins trivial.

Théorème 2.5 *La convergence uniforme avec la supra-convergence simple n'impliquent pas la supra-convergence uniforme.*

Contre-exemple 2.6 *$X = A = \mathbb{N}$. Soit $f(x)$ quelconque. Soient $f_n(x)$ tels que : $f_x(x) = f(x)$, idem pour $n \geq x, f_n(x) = f(x)$, $f_y(x) = f(x) - 1/y$ pour $y < x$. On a bien la supra-convergence simple et aussi la convergence uniforme de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers f. Mais on voit aussi que l'on n'a pas la supra-convergence uniforme, car l'égalité est atteinte de plus en plus loin quand x augmente.*

Ces contre-exemples peuvent nous donner un faux espoir que S.C.S. implique C.U., si on rajoute une contrainte de bon sens de toujours se rapprocher de l'objectif :

Définition 2.7 (Se rapprocher) *Soient X un ensemble, (Y, d) un espace métrique, et A un sous-ensemble de X. Soient $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur X et à valeurs dans Y, et f une fonction définie sur X à valeurs dans Y.*

- *Se rapprocher au sens large* *On dit que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ se rapproche de f au sens large sur A si : $\forall x \in A, \forall n_1, n_2 \in \mathbb{N}, n_1 < n_2 \Rightarrow d(f_{n_2}(x), f(x)) \leq d(f_{n_1}(x), f(x))$,*
- *Se rapprocher au sens strict* *On dit que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ se rapproche de f au sens strict sur A si : $\forall x \in A, \forall n_1, n_2 \in \mathbb{N}, n_1 < n_2 \Rightarrow (d(f_{n_2}(x), f(x)) < d(f_{n_1}(x), f(x)) \vee d(f_{n_2}(x), f(x)) = d(f_{n_1}(x), f(x)) = 0)$.*

Hypothèse simplificatrice 4 :
Et si au lieu de se rapprocher dès le départ, on se rapproche à partir d'un certain rang ? C'est un peu comme les suites périodiques comparées aux suites ultimement périodiques. Dans ce cas, soit on ajoute le mot ultimement à la définition, avec un quantificateur pour dire que ça se rapproche seulement quand $m < n_1$, soit on constate que si la suite est finie on peut regarder la dernière fonction de la suite directement, et si la suite est infinie, ça ne coûte pas grand chose d'enlever les premières fonctions de la suite pour passer d'une suite de fonctions qui se rapprochent ultimement à une suite de fonctions qui se rapprochent.

On voit alors qu'il n'est pas suffisant que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ supra-converge simplement vers f sur A et qu'elle se rapproche de f sur A pour qu'elle converge uniformément.

Contre-exemple 2.8 *$X = A = \mathbb{N}$. Soit $f(x)$ quelconque. Soient $f_n(x)$ tels que : $f_x(x) = f(x)$, idem pour $n \geq x, f_n(x) = f(x)$, $f_y(x) = f(x) - 1$ pour*

$y < x$. On a bien la supra-convergence simple et on se rapproche au sens large, mais on n'a pas la convergence uniforme de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers f. Car $\forall 0 < \varepsilon < 1$, on n'a pas de convergence uniforme à cause de $f_m(m+1)$.

Contre-exemple 2.9 *$X = A = \mathbb{N}$. Soit $f(x)$ quelconque. Soient $f_n(x)$ tels que : $f_x(x) = f(x)$, idem pour $n \geq x, f_n(x) = f(x)$, $f_y(x) = f(x) - 1 - 1/y$ pour $y < x$. On a bien la supra-convergence simple et on se rapproche au sens strict, mais on n'a pas la convergence uniforme de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers f.*

On peut à présent relâcher certaines hypothèses simplificatrices. Que se passe-t-il si on a $\forall\varepsilon \geq 0$? Si on a aussi $d(f_n(x), f(x)) \leq \varepsilon$, on voit que les définitions de convergence simple, resp. convergence uniforme, deviennent des définitions de supra-convergence simple, resp. supra-convergence uniforme. Si on a à la place $\forall\varepsilon \geq 0$ et $d(f_n(x), f(x)) < \varepsilon$, comme on ne peut pas avoir de distance négative, on obtient des définitions sans cas réel. Si on a à la place $\forall\varepsilon > 0$ et $d(f_n(x), f(x)) < \varepsilon$, on obtient des définitions équivalentes.

3 Critères de Cauchy

Rappelons que les critères de Cauchy déterminent si la suite de fonctions converge et comment, de manière indépendante de la connaissance d'une éventuelle limite.

Soient X un ensemble, (Y, d) un espace métrique, et A un sous-ensemble de X. Soient $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur X et à valeurs dans Y.

Critère de Cauchy de convergence simple sur A :
$\forall x \in A, \forall\varepsilon > 0, \exists N_{\varepsilon,x} \in \mathbb{N}, \forall n_1, n_2 \in \mathbb{N}, n_1 \geq N_{\varepsilon,x} \wedge n_2 \geq N_{\varepsilon,x} \Rightarrow d(f_{n_1}(x), f_{n_2}(x)) \leq \varepsilon$.

Critère de Cauchy de convergence uniforme sur A :
$\forall\varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}, \forall n_1, n_2 \in \mathbb{N}, n_1 \geq N_\varepsilon \wedge n_2 \geq N_\varepsilon \Rightarrow (\forall x \in A, d(f_{n_1}(x), f_{n_2}(x)) \leq \varepsilon)$.

Toutes les remarques sur les hypothèses simplificatrices de la section précédente s'appliquent encore.

Définition 3.1 (Convergences au sens de Cauchy) *Soient X un ensemble, (Y, d) un espace métrique, et A un sous-ensemble de X. Soient $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur X et à valeurs dans Y.*

Convergence Simple (C.S.C.) On dit que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur A si : $\forall\varepsilon > 0, \forall x \in A, \exists m \in \mathbb{N}, \forall n_1, n_2 \in \mathbb{N}, n_1 \geq m \wedge n_2 \geq m \Rightarrow d(f_{n_1}(x), f_{n_2}(x)) \leq \varepsilon$,

Convergence Uniforme (C.U.C.) On dit que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur A si : $\forall\varepsilon > 0, \exists m \in \mathbb{N}, \forall x \in A, \forall n_1, n_2 \in \mathbb{N}, n_1 \geq m \wedge n_2 \geq m \Rightarrow d(f_{n_1}(x), f_{n_2}(x)) \leq \varepsilon$,

Supra-Convergence Simple (S.C.S.C.) On dit que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ supra-converge simplement sur A si : $\forall x \in A, \exists m \in \mathbb{N}, \forall\varepsilon > 0, \forall n_1, n_2 \in \mathbb{N}, n_1 \geq m \wedge n_2 \geq m \Rightarrow d(f_{n_1}(x), f_{n_2}(x)) \leq \varepsilon$, *Supra-Convergence Uniforme (S.C.U.C.) On dit que la suite* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *supra-converge uniformément sur* A *si :* $\exists m \in \mathbb{N}, \forall \varepsilon > 0, \forall x \in A, \forall n_1, n_2 \in \mathbb{N}, n_1 \geq m \wedge n_2 \geq m \Rightarrow d(f_{n_1}(x), f_{n_2}(x)) \leq \varepsilon$.

Théorème 3.2 *Avec les convergences au sens de Cauchy, on a :*

— *La convergence uniforme implique la convergence simple.*
— *La supra-convergence uniforme implique la supra-convergence simple.*
— *La supra-convergence simple implique la convergence simple.*
— *La supra-convergence uniforme implique la convergence uniforme.*

Théorème 3.3

— *La convergence simple vers une fonction* f *et la convergence uniforme au sens de Cauchy impliquent la convergence uniforme vers* f.
— *La convergence simple vers une fonction* f *et la supra-convergence simple au sens de Cauchy impliquent la supra-convergence simple vers* f.
— *La convergence simple vers une fonction* f *et la supra-convergence uniforme au sens de Cauchy impliquent la supra-convergence uniforme vers* f.

4 Convergence approximative

On peut s'inspirer des algorithmes d'approximation pour définir des convergences : une convergence à une constante additive près, ou une convergence à une constante multiplicative près. $d(f_n(x), f(x)) \leq \varepsilon + \delta$ nous donne l'une des variantes à une constante additive près. $d(f_n(x), f(x)) \leq \varepsilon + \delta \times f(x)$ nous donne l'une des variantes à une constante multiplicative près. $d(f_n(x), f(x)) \leq \delta \times f(x)$ nous donne une autre des variantes à une constante multiplicative près.

Première remarque : ça n'a pas grand sens de définir une convergence à une constante multiplicative près au sens de Cauchy, car là on voit bien que l'on a besoin de fixer l'objectif.

Deuxième remarque : il y a bien des formulations équivalentes dans le cas additif.

$$\begin{aligned} &..., \forall \varepsilon > 0, ..., n \geq m \Rightarrow d(f_n(x), f(x)) \leq \varepsilon + \delta \\ \Leftrightarrow\ &..., \forall \varepsilon > 0, ..., n \geq m \Rightarrow d(f_n(x), f(x)) < \varepsilon + \delta \\ \Leftrightarrow\ &..., \forall \varepsilon > \delta, ..., n \geq m \Rightarrow d(f_n(x), f(x)) \leq \varepsilon \\ \Leftrightarrow\ &..., \forall \varepsilon > \delta, ..., n \geq m \Rightarrow d(f_n(x), f(x)) < \varepsilon. \end{aligned}$$

On n'a pas de garantie d'atteindre la constante additive d'approximation, mais on s'en rapproche aussi près que l'on veut, sauf quand les quantificateurs sont ceux de la supra-convergence car alors on atteint la constante additive d'approximation.

$$
\begin{aligned}
&..., \forall \varepsilon \geq 0, ..., n \geq m \Rightarrow d(f_n(x), f(x)) \leq \varepsilon + \delta \\
\Leftrightarrow\ &..., \forall \varepsilon \geq \delta, ..., n \geq m \Rightarrow d(f_n(x), f(x)) \leq \varepsilon \\
\Leftrightarrow\ &..., n \geq m \Rightarrow d(f_n(x), f(x)) \leq \delta.
\end{aligned}
$$

On atteint toujours la constante additive d'approximation.

$$
\begin{aligned}
&..., \forall \varepsilon \geq 0, ..., n \geq m \Rightarrow d(f_n(x), f(x)) < \varepsilon + \delta \\
\Leftrightarrow\ &..., \forall \varepsilon \geq \delta, ..., n \geq m \Rightarrow d(f_n(x), f(x)) < \varepsilon \\
\Leftrightarrow\ &..., n \geq m \Rightarrow d(f_n(x), f(x)) < \delta.
\end{aligned}
$$

On fait mieux qu'atteindre la constante additive d'approximation, car on peut être moins loin que ça.

On constate que l'on a 3 grandes familles de variantes. Pour simplifier dans la suite, nous avons gardé la convention de prendre ε (strictement) plus grand que δ.

Définition 4.1 *Soient X un ensemble, (Y, d) un espace métrique, et A un sous-ensemble de X. Soient $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur X et à valeurs dans Y, et f une fonction définie sur X à valeurs dans Y. Soit δ un réel strictement positif.*

— *On dit que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers f sur A à une constante additive δ près majorée si : $\forall \varepsilon > \delta, \forall x \in A, \exists m \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq m \Rightarrow d(f_n(x), f(x)) \leq \varepsilon \Leftrightarrow \forall \varepsilon > \delta, \forall x \in A, \exists m \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq m \Rightarrow d(f_n(x), f(x)) < \varepsilon$.*

— *On dit que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers f sur A à une constante additive δ près atteinte si : $\forall \varepsilon \geq \delta, \forall x \in A, \exists m \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq m \Rightarrow d(f_n(x), f(x)) \leq \varepsilon \Leftrightarrow \forall x \in A, \exists m \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq m \Rightarrow d(f_n(x), f(x)) \leq \delta$.*
C'est équivalent avec le cas où la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ supra-converge simplement vers f sur A à une constante additive δ près majorée si : $\forall x \in A, \exists m \in \mathbb{N}, \forall \varepsilon > \delta, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq m \Rightarrow d(f_n(x), f(x)) \leq \varepsilon \Leftrightarrow \forall x \in A, \exists m \in \mathbb{N}, \forall \varepsilon > \delta, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq m \Rightarrow d(f_n(x), f(x)) < \varepsilon$.
C'est aussi équivalent avec le cas où la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ supra-converge simplement vers f sur A à une constante additive δ près atteinte si : $\forall x \in A, \exists m \in \mathbb{N}, \forall \varepsilon \geq \delta, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq m \Rightarrow d(f_n(x), f(x)) \leq \varepsilon \Leftrightarrow \forall x \in A, \exists m \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq m \Rightarrow d(f_n(x), f(x)) \leq \delta$.

— *On dit que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers f sur A à une constante additive δ près minorée si : $\forall \varepsilon \geq \delta, \forall x \in A, \exists m \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq m \Rightarrow d(f_n(x), f(x)) < \varepsilon \Leftrightarrow \forall x \in A, \exists m \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq m \Rightarrow d(f_n(x), f(x)) < \delta$.*
C'est aussi équivalent avec le cas où la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ supra-converge simplement vers f sur A à une constante additive δ près minorée si : $\forall x \in A, \exists m \in \mathbb{N}, \forall \varepsilon \geq \delta, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq m \Rightarrow d(f_n(x), f(x)) < \varepsilon \Leftrightarrow \forall x \in A, \exists m \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq m \Rightarrow d(f_n(x), f(x)) < \delta$.

— *On dit que la suite* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge uniformément vers* f *sur* A *à une constante additive* δ *près majorée si :* $\forall\varepsilon > \delta, \exists m \in \mathbb{N}, \forall x \in A, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq m \Rightarrow d(f_n(x), f(x)) \leq \varepsilon \Leftrightarrow \forall\varepsilon > \delta, \forall x \in A, \exists m \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq m \Rightarrow d(f_n(x), f(x)) < \varepsilon$.

— *On dit que la suite* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge uniformément vers* f *sur* A *à une constante additive* δ *près atteinte si :* $\forall\varepsilon \geq \delta, \exists m \in \mathbb{N}, \forall x \in A, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq m \Rightarrow d(f_n(x), f(x)) \leq \varepsilon \Leftrightarrow \exists m \in \mathbb{N}, \forall x \in A, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq m \Rightarrow d(f_n(x), f(x)) \leq \delta$.

C'est aussi équivalent avec le cas où la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *supra-converge uniformément vers* f *sur* A *à une constante additive* δ *près majorée si :* $\exists m \in \mathbb{N}, \forall\varepsilon > \delta, \forall x \in A, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq m \Rightarrow d(f_n(x), f(x)) \leq \varepsilon \Leftrightarrow \exists m \in \mathbb{N}, \forall\varepsilon > \delta, \forall x \in A, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq m \Rightarrow d(f_n(x), f(x)) < \varepsilon$.

C'est aussi équivalent avec le cas où la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *supra-converge uniformément vers* f *sur* A *à une constante additive* δ *près atteinte si :* $\exists m \in \mathbb{N}, \forall\varepsilon \geq \delta, \forall x \in A, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq m \Rightarrow d(f_n(x), f(x)) \leq \varepsilon \Leftrightarrow \exists m \in \mathbb{N}, \forall x \in A, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq m \Rightarrow d(f_n(x), f(x)) \leq \delta$.

— *On dit que la suite* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge uniformément vers* f *sur* A *à une constante additive* δ *près minorée si :* $\forall\varepsilon \geq \delta, \exists m \in \mathbb{N}, \forall x \in A, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq m \Rightarrow d(f_n(x), f(x)) < \varepsilon \Leftrightarrow \exists m \in \mathbb{N}, \forall x \in A, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq m \Rightarrow d(f_n(x), f(x)) < \delta$.

C'est aussi équivalent avec le cas où la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *supra-converge uniformément vers* f *sur* A *à une constante additive* δ *près minorée si :* $\exists m \in \mathbb{N}, \forall\varepsilon \geq \delta, \forall x \in A, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq m \Rightarrow d(f_n(x), f(x)) < \varepsilon \Leftrightarrow \exists m \in \mathbb{N}, \forall x \in A, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq m \Rightarrow d(f_n(x), f(x)) < \delta$.

Cela nous donne déjà 6 définitions de plus (avec beaucoup d'équivalences). Sur un modèle similaire, on pourrait en définir au plus 12 de plus à une constante multiplicative δ près de type 1, pour $d(f_n(x), f(x)) \leq \varepsilon + \delta \times f(x)$. Et on pourrait encore en définir au plus 12 de plus à une constante multiplicative δ près de type 2, pour $d(f_n(x), f(x)) \leq \delta \times f(x)$.

Vu la probabilité de faire une erreur, c'est peu gratifiant si ce n'est pas fait directement dans Rocq (anciennement Coq) ou dans LEAN.

Merci Dieu ! Merci Père ! Merci Jésus ! Merci Saint-Esprit !

Références

Wikipedia. Convergence simple. `https://fr.wikipedia.org/wiki/Convergence_simple`, 2026a.

Wikipedia. Convergence uniforme. `https://fr.wikipedia.org/wiki/Convergence_uniforme`, 2026b.

Wikipedia. Pointwise convergence. `https://en.wikipedia.org/wiki/Pointwise_convergence`, 2026c.

Wikipedia. Uniform convergence. `https://en.wikipedia.org/wiki/Uniform_convergence`, 2026d.

Archive

FR V1 2026/05/09 cette version :
https://lyaudet.eu/laurent/Publi/Journaux/LL2026Convergence/LL2026Convergence_fr_v1.pdf
EN V1 2026/05/09 :
https://lyaudet.eu/laurent/Publi/Journaux/LL2026Convergence/LL2026Convergence_en_v1.pdf